ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ



1. Τα ίσα διανύσματα είναι ομόρροπα Σ Λ
2. Τα ομόρροπα διανύσματα είναι ίσα Σ Λ
3. Τα αντίρροπα διανύσματα είναι αντίθετα Σ Λ
4. Αν  Σ Λ
5. Ισα είναι τα διανύσματα που έχουν την ………. διεύθυνση , ……………. φορά και …………… μέτρα

6. Αντίθετα είναι τα …………………. που έχουν την ……….. διεύθυνση ,………… φορά και ………………… μέτρα

7.Αν 

8. Αν 

9. Αν 

|  |  |
| --- | --- |
| 10. Αν  = , τότε  = . | Σ Λ |
| 11.Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα. | Σ Λ |
| 12. Αν  = - , τότε (,) + (,) = 2π. | Σ Λ |
|  |  |

13.Δίνονται τα σημεία Α, Β,Γ,Δ,Ε,Μ , Ζ ώστε . Να αποδείξετε ότι 

14.Δίνονται τα σημεία Α, Β , Γ , Δ και Ε . Αν ισχύουν οι ισότητες  αποδείξετε ότι το σημείο Ε είναι μέσο του 

15.Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ. Αν Δ και Ε είναι σημεία ώστε  να αποδείξετε ότι 

|  |  |
| --- | --- |
| 16. i) Αν  +  +  = , τότε  = . | **Σ Λ** |
|  ii) Αν το  +  είναι συγγραμμικό του , τότε το  +  είναι συγγραμμικό του . | **Σ Λ** |
|  iii)Αν  =  + , τότε τα  και  είναι πάντα συγγραμμικά. | **Σ Λ** |

iv) 

v) Αν  τότε τα διανύσματα  είναι ίσα Σ Λ

vi) Aν  τότε τα διανύσματα είναι αντίρροπα Σ Λ vii) Αν  Σ Λ

vii) Αν τα  είναι μοναδιαία και ισχύει 

17.Εστω τα σημεία Α , Β, Γ, και Κ, Λ, Μ . Να αποδείξετε ότι

 

18. Εστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ το μέσον του ΑΒ . Να αποδείξετε ότι

 

19. Εστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το σημείο Ο για το οποίο ισχύει

 . Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Α συμπίπτουν

20.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Θεωρούμε τα διανύσματα  Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β,Δ και Ε είναι συνευθειακα και ότι το Β είναι μέσο του ΕΔ

21.Με βάση το σχήμα να συμπληρώσετε τα παρακατω :

 

 

 

22. 

23.



24.



25.



26.



27. 

28.



29.



30.



31.



32.



33.



34.



35.



36.



37.



38.



39.



40.



41. 





42. 



43. 



44.





45.





46.





47.





48. 



49.





50.





51.





52.i) 

ii) 



53. 





54. 



55.



56.



ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

57. ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{α}, \vec{β}$ ισχύει:

$\left|\vec{α}+\vec{β}\right|^{2}+\left|\vec{α}-\vec{β}\right|^{2}=2\left|\vec{α}\right|^{2}+2\left|\vec{β}\right|^{2}$ (1)

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο $ΟΑΓΒ$ με $\vec{ΟΑ}=\vec{α} και \vec{ΟΒ}=\vec{β}$.

1. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{α}+\vec{β}$ και $\vec{α}-\vec{β}$.

(Μονάδες 05)

1. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

(Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}\_{1} και \vec{F}\_{2}$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα $10 N (Newton)$ και η γωνία που σχηματίζουν είναι $60°$. Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



(Μονάδες 10)

58. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}=\left(3,2\right), \vec{β}=\left(-2,1\right).$

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v}=2\vec{α}+3\vec{β}$.

  (Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{α}∙\vec{β}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{α}$ .

(Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{α}∙\vec{v}$.

(Μονάδες 12)

59. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο  με  και , όπου  και  είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. .

(Μονάδες 9)

ii. .

(Μονάδες 9)

β) Αν , να δείξετε ότι το  είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

60. ΘΕΜΑ 2 Στο καρτεσιανό επίπεδο $Οxy$, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x^{'}x $, $y'y$ τα $\vec{i} $,$ \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία $Α$ και $Β$ έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{ΟΑ}=3\vec{i}+2\vec{j}$ και $\vec{ΟΒ}=6\vec{i}-\vec{j}$. Έστω $Μ$ ένα σημείο τέτοιο ώστε $\vec{ΟΜ}=$ $\frac{1}{5}$ $\left(2\vec{ΟΑ}-\vec{ΟΒ} \right)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

1. $\vec{ΑΒ}=3\vec{i}-3\vec{j}$ , (Μονάδες 8)
2. $\vec{ΟΜ}=\vec{j}$ . (Μονάδες 8)

β)Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{ΑΒ}∙\vec{ΟΜ}$

. (Μονάδες 9)

61. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}$ = (-1,3), $\vec{β}$ = (-2, - $\frac{1}{2}$ ) και $\vec{v}=\left(x^{2},x-1\right)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{α}-2\vec{β}$.

 (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u}$ = (3,4) και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

 (Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{β}$ είναι συγγραμμικά;

 (Μονάδες 09)

62. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}, \vec{AΓ}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{Α}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\vec{ΑΜ}$ και $\vec{ΒΓ}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\vec{ΒΓ}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{ΑΓ}$ και $\vec{ΑΜ}$. (Μονάδες 8)

63. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$ και $\vec{γ}$, για τα οποία ισχύουν: |$\vec{α}$|= 4, |$\vec{β}$|= 5, ($\hat{\vec{α}, \vec{β}}$) = $\frac{2π}{3}$ και $\vec{γ}$ = 2$\vec{α}$ + 3$\vec{β}$ . Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{α}$∙$\vec{β}$ . (Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{γ}$. (Μονάδες 15)

64. 

65. 

66. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $Α\left(-6,-1\right), Β\left(8,7\right), Γ(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $ΑΒΓ$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{ΑΒ}, \vec{ΒΓ}$ και του αθροίσματος τους $\vec{ΑΒ}+\vec{ΒΓ}$.

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

(Μονάδες 15)

67. 

68. 

69. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα$ \vec{α}$ και $\vec{β}$ με: |$\vec{α}$| = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, |$\vec{β}$| = $\frac{1}{2}$ και |3$\vec{α}$ + 2$\vec{β}$| = |$\vec{α}$ - 2$\vec{β}$|.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{α}$ ∙ $\vec{β}$ = . (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων και . (Μονάδες 10)

70. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(-2 , 3), Β (0 , 8), Γ (5 , 3) και Δ (10 , 5). Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{ΑΒ}$∙$\vec{ΓΔ}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}$ = $\vec{ΑΒ}$ + $\vec{ΓΔ}$ με τον άξονα x’x. (Μονάδες 13)

71. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}$ = (2 , -1) και $\vec{β}$ = (-3 , 2).

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{α}$·(2$\vec{α}$ - $\vec{β}$). (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{γ}$ = (x , y) όταν $\vec{γ}$ $⊥$ $\vec{α}$ και | $\vec{γ}$ |= $\sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

72. ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε τα διανύσματα  με ,  , και τα διανύσματα  και .

α) Να βρείτε το .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα 

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη γωνία .

(Μονάδες 5)

73. 

74. ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $Α(- 2, 5), Β(7, 8), Γ(1, - 4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{ΑΒ}$ και $\vec{ΑΓ}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{ΑΒ}$ $∙\vec{ΑΓ}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $Β\hat{Α}Γ$. (Μονάδες 5)

75. 

76. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

1. $\left(\hat{\vec{ΑΒ, }\vec{ΑΓ}}\right)$
2. $\left(\hat{\vec{ΑΜ, }\vec{ΒΓ}}\right)$
3. $\left(\hat{\vec{ΑΜ, }\vec{ΓΑ}}\right)$
4. $\left(\hat{\vec{ΒΜ, }\vec{ΓΜ}}\right)$
5. $\left(\hat{\vec{ΓΜ, }\vec{ΓΒ}}\right)$

 (Μονάδες 10)

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

1. $\vec{ΑΜ}$ ⬝ $\vec{ΒΓ}$
2. $\vec{ΑΜ}$ ⬝ $\vec{ΓΑ}$
3. $\vec{ΓΜ}$ ⬝ $\vec{ΓΒ}$

 (Μονάδες 15)



77. ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα διανύσματα  με  , , και το .

α) Να αποδείξετε ότι . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι . (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη . (Μονάδες 7)

78. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}=\left(1,3\right), \vec{β}=(3,-1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο$ \vec{α}∙\vec{β}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{α},\vec{β}$.

                                (Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{γ}=2\vec{α}-\vec{β}$ .

                                      (Μονάδες 12)

79. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα  και .

α) Να αποδείξετε ότι . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι . (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι . (Μονάδες 8)

80. ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$ τέτοια ώστε $\left|\vec{α}\right|=3,\left|\vec{β}\right|=4$ και $\left(\hat{\vec{α,}\vec{β }} \right)=\frac{π}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{α}$,$ \vec{β}$.

 (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{α}^{2}$ και $\vec{β}^{2}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\left(3\vec{α}-\vec{β}\right)∙\left(\vec{α}-3\vec{β}\right)=15.$

(Μονάδες 10)

81. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε σημεία εσωτερικά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\vec{ΑΒ}$=κ$∙\vec{ΑΔ}$ και $\vec{ΑΓ}$ =λ$∙$ $\vec{ΑΕ}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\vec{ΑΒ}$= $\vec{α}$ και $\vec{ΑΓ}$ = $\vec{β}$ ,τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{ΔΕ}$ και $\vec{ΒΓ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{α} και$ $\vec{β}$.

β)

1. Αν κ=λ , να αποδείξετε ότι $\vec{ΒΓ}$ // $\vec{ΔΕ}$ και |$\vec{ΒΓ}|$ = κ|$\vec{ΔΕ}|$. (Μονάδες 10)
2. Aν κ=λ=2, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα$ \vec{ΔΕ}$ και $\vec{ΒΓ}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 7)

82. 

83. 

84. 

85. 

86. 

87. 

88. 

89. 

90. 

91. 