ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΑ

1. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση (2λ+1)x – (λ – 2)y + λ - 7 = 0 (Ε) με λ$\in $ $R$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: 6x - 8y + 3 = 0.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε λ $\in R$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα λ$\in R$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του λ $\in R$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε);(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ).(Μονάδες 5)

2. ΘΕΜΑ 4

Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία Α(1, –1), Β(2, 2) και Γ(μ–1, 3μ–2), μ∈R.

α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία

ε: y = 3x +1. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Β και από τις οποίες το σημείο Α, απέχει απόσταση ίση με 1. (Μονάδες 8)

3. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(1, 5) και Γ(5, -1).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση.

δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

 (ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ).

4. ΘΕΜΑ 4

         Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $Α(-1,-2)$ και

 $Β(3,1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $δ:x+y-1=0. $

 α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου $δ$:

 i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.

 ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.

 β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία $Α, Β$ και $Γ$ είναι ίσο με $8$.

5 ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία Α και Β. Κάθε χρονική στιγμή t με t≥ 0 η θέση του πρώτου σημείου είναι Α(t-1, 2t-1) και του δευτέρου Β(3t-1, -4t-1).

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.

β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;

γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή t=2.

δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε: 4x+3y+7=0 ισούται με 6.

 6. ΘΕΜΑ 4

Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).

α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)

β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)

7. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $Α(2,0)$ , $Β\left(3,4\right)$ και $λ\in R$.

α)

1. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $Α$ και έχουν κλίση $λ$.
2. Να αποδείξετε οτι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο $Α$, έχει κλίση $λ$ και απέχει απόσταση ίση με $1$ από το σημείο $Β$, έχει εξίσωση $\left(ε\right):15x-8y-30=0$.

β) Να αποδείξετε οτι υπάρχει και άλλη ευθεία $(ζ)$, εκτός από την $\left(ε\right)$, η οποία διέρχεται από το σημείο $Α$ και απέχει απόσταση ίση με $1$ από το σημείο $Β$.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $\left(ε\right)$ και $\left(ζ\right)$.

8. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η (ε): $y=2x-1.$

β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $Γ\left(2^{100},5\right)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

9. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία , ,  και , όπου  σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  είναι ισοσκελές και το σημείο  είναι το μέσο της βάσης του .

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών  και  είναι  και αντίστοιχα.

γ) Αν  είναι η απόσταση του σημείου  από την ευθεία  και  η απόσταση του σημείου  από την ευθεία , να αποδείξετε ότι .

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

10. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $Α(1,3), Β(-2,2)$ και η ευθεία ε: $3x+y+α =0,$ με $αϵR$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

Β) Για $α=4$

       i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y΄y$.

       ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

11. ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία $Α(- 2, - 3)$ και $Β(7, 9)$. Έστω $S$ το σύνολο των σημείων Μ που είναι κορυφές των τριγώνων ΑΜΒ ώστε $\left(ΑΜΒ\right)=12$ τ.μ.

α) Να αποδείξτε ότι το $S$ αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών

 $\left(ε\_{1}\right):4x-3y-9=0$ και $\left(ε\_{2}\right):4x-3y+7=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοπαράλληλη των$ \left(ε\_{1}\right)$ και $\left(ε\_{2}\right)$.

γ) Θεωρούμε ένα σημείο $Μ\_{1}$ στην $\left(ε\_{1}\right)$ και ένα σημείο $Μ\_{2}$ στην $\left(ε\_{2}\right)$ ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο $ΑΜ\_{1}ΒΜ\_{2}$. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $ΑΧΒΥ$ υπάρχουν, αν το Χ πρέπει να είναι σημείο της $\left(ε\_{1}\right)$ και το Υ σημείο της $\left(ε\_{2}\right)$, που έχουν το ίδιο εμβαδό με το $ΑΜ\_{1}ΒΜ\_{2}$; Εξηγήστε.

12. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου ,  και .

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος  είναι η ευθεία : .

γ) Να βρείτε σημείο  της ευθείας  του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε . Τι ιδιότητα έχει το σημείο ;

13. ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία ,  και  και το μεταβλητό σημείο .

α) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ.

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει . Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;