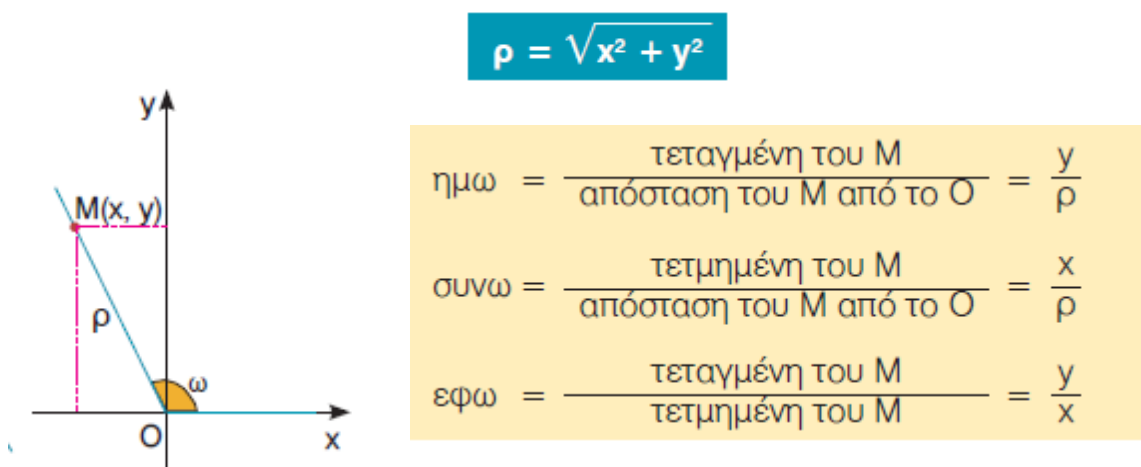


A) Έχουμε μάθει έως τώρα στην τριγωνομετρία πώς βρίσκουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας αλλά και αμβλείας γωνίας με βάση ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

Συγκεκριμένα :

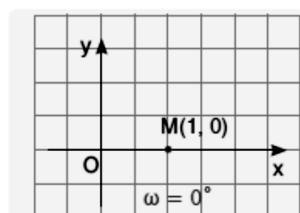


Με βάση τους παραπάνω τύπους να κάνετε την εξής άσκηση

ΑΣΚΗΣΗ1

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να πάρετε το σημείο $M(-6,-8)$ και να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\widehat{xOM}$.

B) Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς μάθαμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$

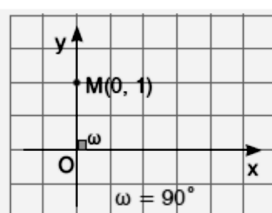


Αν M σημείο του ημιάξονα Ox π.χ. το $M(1,0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 0^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\epsilon\phi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

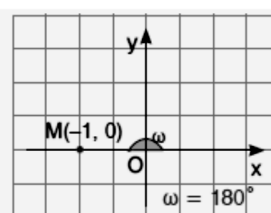


Αν M σημείο του ημιάξονα Oy π.χ. το $M(0,1)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 90^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$\epsilon\phi 90^\circ$ δεν ορίζεται (γιατί $x=0$)



Αν M σημείο του ημιάξονα Ox' π.χ. το $M(-1,0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 180^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\epsilon\phi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

Που πρέπει να τους ξέρουμε απέξω όπως και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30, 45 , 60 .

ω	30°	45°	60°
ημω	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφω	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Θυμηθείτε το κολπάκι που έχουμε πει

Έτσι συνολικά είχαμε φτιάξει έναν πίνακα που είχε όλους τους παραπάνω τριγωνομετρικούς αριθμούς

Με βάση τους παραπάνω τύπους να κάνετε τις εξής ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 2

Συμπληρώστε τον παραπάνω πίνακα

Γωνία ω	0°	30°	45°	60°	90°	180°
ημω						
συνω						
εφω						

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = 2 \cdot \text{συν}45^\circ + 2 \cdot \text{ημ}30^\circ - \text{εφ}40^\circ$$

$$B = \sqrt{2} \cdot \text{ημ}45^\circ \cdot \text{συν}30^\circ \cdot \text{εφ}60^\circ$$

B) Κατόπιν μάθαμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών

Γενικά

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ισχύουν:

• $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$ • $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ • $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$

Για παράδειγμα,

$$\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\varphi 150^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Προσοχή στο εξής :

Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες 150° και 30° , αν και δεν είναι ίσες, έχουν το ίδιο ημίτονο. Επομένως:

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι από 0° μέχρι και 180° , τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Για παράδειγμα, αν $\eta\mu x = \eta\mu 35^\circ$ και $0 \leq x \leq 180^\circ$, τότε είναι $x = 35^\circ$ ή $x = 180^\circ - 35^\circ$, δηλαδή $x = 35^\circ$ ή $x = 145^\circ$.

Με βάση το οποίο έχουμε το εξής παράδειγμα

Αν για τη γωνία x ισχύει $0 \leq x \leq 180^\circ$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\eta\mu x = \eta\mu 60^\circ$, τότε $x = 60^\circ$ ή $x = 120^\circ$

β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 20^\circ$, τότε $x = 160^\circ$

γ) Αν $\epsilon\varphi x = -\epsilon\varphi 30^\circ$, τότε $x = 150^\circ$

$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \cos x = \cos(180 - 20^\circ) \Rightarrow \cos x = \cos 160^\circ \\ \rightarrow \tan x = \tan(180 - 30^\circ) \text{ αρα } \tan x = \tan 150^\circ \end{array} \right\}$

Με βάση τους παραπάνω τύπους να κάνετε τις εξής ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 135° .

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:
α) $\eta\mu 110^\circ$ β) $\eta\mu 150^\circ$ γ) $\sigma\upsilon\nu 125^\circ$ δ) $\epsilon\phi 100^\circ$

Για τις α, γ, δ, χρησιμοποιήστε τον πίνακα στο τέλος του βιβλίου

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
 $A = \sigma\upsilon\nu 120^\circ + 3\eta\mu 150^\circ - \epsilon\phi 135^\circ$ $B = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu 135^\circ \cdot \eta\mu 150^\circ \cdot \epsilon\phi 120^\circ$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να βρείτε τη γωνία x , όταν:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} & \beta) \eta\mu x = 1 - \eta\mu x & \gamma) \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \delta) \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} & \epsilon) \epsilon\phi x = -\sqrt{3} & \sigma\tau) 2\epsilon\phi x = 1 + \epsilon\phi x \end{array}$$

Πρόβλημα στην β)

Είναι: $\eta\mu x = 1 - \eta\mu x$ άρα

$$\eta\mu x + \eta\mu x = 1 \text{ άρα}$$

$$2\eta\mu x = 1 \text{ άρα } \dots$$

Παρόμοια στην γ) ότι

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 135^\circ = 1 \quad \beta) \eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 150^\circ = 2$$