


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ
Φυλλάδιο ΑΛ.2
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α.1.5 .
Ταυτότητες

1. Χρησιμοποιώντας τις αξιοσημείωτες ταυτότητες να βρείτε τα αναπτύγματα στα παρακάτω

- | | | |
|--------------------------------------|--|-----------------------------|
| 1.1. $(x+3)^2 =$ | 1.8. $(x+2\psi)^2 =$ | 1.15. $(x+2)^3 =$ |
| 1.2. $(\psi-2)^2 =$ | 1.9. $(4x-3\psi)^2 =$ | 1.16. $(x-1)^3 =$ |
| 1.3. $(x+1)^2 =$ | 1.10. $(x+3)(x-3) =$ | 1.17. $(3x-2)^3 =$ |
| 1.4. $(\alpha+\frac{2}{3})^2 =$ | 1.11. $(2x-1)(2x+1) =$ | 1.18. $(\frac{x}{2}-3)^3 =$ |
| 1.5. $(x+\frac{1}{x})^2 =$ | 1.12. $(4x-3\psi)(4x+3\psi) =$ | |
| 1.6. $(\frac{x}{3}+\frac{y}{2})^2 =$ | 1.13. $(x-\frac{2}{y})(x+\frac{2}{y}) =$ | |
| 1.7. $(2x-3)^2 =$ | 1.14. $(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{3})(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3}) =$ | |

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

- α) $A = 2(x-2)^2 - (x+3)^2 - (x-2)(x-3)$ (Απάντηση: $A = -9x - 7$)
 β) $B = (3x-4)^2 + (3x+4)^2 - 2(3x-4)(3x+4)$ (Απάντηση $B = 64$.)

3. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

- α) $(x-1)(x+1)^3 - 2x(x-1)(x+1) = x^4 - 1$
 β) $(\alpha-3\beta)^2 + (3\alpha+2\beta)(3\alpha-2\beta) - (3\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$
 γ) $\alpha(\alpha+3\beta)^2 - \beta(\beta+3\alpha)^2 = (\alpha-\beta)^3$

4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\Gamma = \alpha^2 + \beta^2$, $A\Gamma = \alpha^2 - \beta^2$, $AB = 2\alpha\beta$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει την γωνία Α ορθή.

5. Αν $x + y = 1$ και $x \cdot y = 1$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- α) $x^2 + y^2$ β) $5x^2 - 6xy + 5y^2$

6. Αν $x + \frac{1}{x} = 5$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ β) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

7. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+x+1) \cdot (x^2+x-1)$$

$$B = (x^4+1)(x^2+1)(x-1)(x+1).$$

$$\Gamma = (\alpha - 1)^2 - 2(\alpha^2 - 1) + (\alpha + 1)^2$$

$$\Delta = (3 - x)^2 + (3 + x)^2 - 2(x^2 - 9)$$

8. Δίνεται η παράσταση $A = (x + y)^2 + (2x - y)^2 - (x - y)(x + y) - x^2$

α) Να αποδείξετε ότι $A = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$

β) Αν $x = \sqrt{2} - 1$ και $y = \sqrt{2} + 1$, να δείξετε ότι $A = 16$

9. Αν $A = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ και $B = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ τότε :

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων **A, B**

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\Gamma = A \cdot B$ είναι ίση με 1

10. Με τη βοήθεια της ταυτότητας $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 200^2 - 190^2$$

$$B = 111^2 - 11^2$$

$$\Gamma = 47^2 - 43^2$$

11. Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων: $A = 99^2 + 198 + 1$, $B = 1001^2 - 2002 + 1$

12. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$$

$$\beta) B = (\sqrt{11} - \sqrt{2})(\sqrt{11} + \sqrt{2})$$

$$\gamma) \Gamma = (2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{6})(2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

$$\delta) \Delta = \frac{2 \cdot \sqrt{3} - 3\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$

13. Αν $\alpha = \sqrt{8} + \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{8} - \sqrt{2}$ να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \alpha^2 + \beta^2 = 16$$

$$\beta) \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 14$$

14. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές $2 + \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$ και $2 \cdot \sqrt{3}$ είναι ορθογώνιο

15. Αν για τους αριθμούς α , β γνωρίζουμε ότι: $\alpha + \beta = \sqrt{5}$ και $\alpha - \beta = \sqrt{3}$ να δείξετε ότι $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ και να υπολογίσετε το άθροισμα τετραγώνων των α , β .

16. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 99^2 + 100^2 - 2 \cdot (1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 99 \cdot 100)$$

17. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\beta) \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$$

18. Το άθροισμα δύο αντίστροφων αριθμών είναι $2\sqrt{2}$.

Να υπολογιστούν :

α) Το άθροισμα των τετραγώνων τους.

β) Το άθροισμα των κύβων τους

γ) Το τετράγωνο της διαφοράς τους και η διαφορά τους.