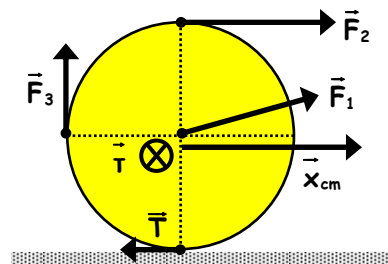


Η φορά της στατικής τριβής.

Ένα από τα ζητήματα που μας δυσκολεύουν είναι η σχεδίαση της στατικής τριβής με τη σωστή φορά. Η δυσκολία οφείλεται στο γεγονός ότι η φορά και το μέτρο της εξαρτώνται από τις υπόλοιπες δυνάμεις που δρουν στο σώμα. Σε κάποιες περιπτώσεις είναι εφικτό να προσδιορίσουμε τη φορά της, ενώ σε άλλες όχι. Στις περιπτώσεις που δεν μπορούμε να τη σχεδιάσουμε από την αρχή σωστά ή "βαριόμαστε" να ψάξουμε, δεν πειράζει και ... να κάνουμε λάθος. Αν μετά τις πράξεις προκύψει αρνητικό αποτέλεσμα σημαίνει ότι την έχουμε σχεδιάσει λανθασμένα. Δεν χρειάζεται να κάνουμε πάλι τις πράξεις με τη σωστή φορά, διότι η απόλυτη τιμή μας δίνει το σωστό μέτρο.

Τα κλειδιά:

- Εάν έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση, τα μέτρα της ταχύτητας του κέντρου μάζας και της γωνιακής ταχύτητας συνδέονται με τη σχέση: $u_{cm} = \omega \cdot R$. Επομένως εάν το μέτρο της μιας ταχύτητας αυξάνεται ή μειώνεται ή μένει σταθερό το ίδιο θα συμβαίνει στο μέτρο της άλλης.
- Μια δύναμη που διέρχεται από το cm , έχει μόνο "μεταφορικό" ρόλο, δηλ. μπορεί να προκαλέσει μόνο μεταφορική επιτάχυνση και να μεταβάλλει μόνο τη μεταφορική κινητική κατάσταση.
- Μια δύναμη που ΔΕΝ διέρχεται από το cm ΚΑΙ είναι κάθετη στη μετατόπιση του cm , έχει μόνο "στροφικό" ρόλο, δηλ. μπορεί να προκαλέσει μόνο γωνιακή επιτάχυνση και να μεταβάλλει μόνο τη στροφική κινητική κατάσταση.
- Μια δύναμη που ΔΕΝ διέρχεται από το cm και ΔΕΝ είναι κάθετη στη μετατόπιση του cm , έχει ΚΑΙ "μεταφορικό" ΚΑΙ "στροφικό" ρόλο, δηλ. μπορεί να προκαλέσει ΚΑΙ μεταφορική ΚΑΙ γωνιακή επιτάχυνση, με αποτέλεσμα να μεταβάλλει και τη μεταφορική και τη στροφική κινητική κατάσταση.
- Ένα ζεύγος δυνάμεων έχει μόνο "στροφικό" ρόλο, δηλ. μπορεί να προκαλέσει μόνο γωνιακή επιτάχυνση και να μεταβάλλει μόνο τη στροφική κινητική κατάσταση.
- Στη ΚΧΟ η στατική τριβή (εάν υπάρχει) έχει και "μεταφορικό" και "στροφικό" ρόλο, οπότε προκαλεί ΚΑΙ μεταφορική ΚΑΙ γωνιακή επιτάχυνση. Η φορά και το μέτρο της είναι τέτοια ώστε να εμποδίζεται η ολίσθηση.

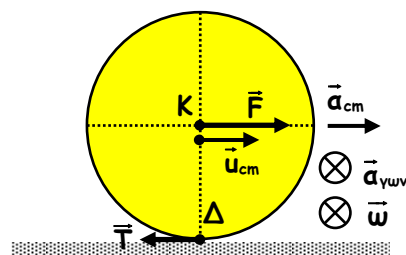


Προσοχή!!!

Για να είναι σωστές οι σχέσεις $u_{cm} = \omega R$ και $a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R$, πρέπει οι θετικές φορές στους δύο άξονες να είναι "συμβατές". Δηλ. όταν η ταχύτητα του cm είναι θετική τότε και η γωνιακή ταχύτητα να είναι θετική και όταν η ταχύτητα του cm είναι αρνητική τότε και η γωνιακή ταχύτητα να είναι αρνητική. Προτείνεται να ορίζουμε ως θετική φορά για τη μεταφορική κίνηση (πιο σωστά για τη κίνηση του cm) τη φορά της αρχικής ταχύτητας του cm και για την στροφική κίνηση τη φορά της αρχικής γωνιακής ταχύτητας.

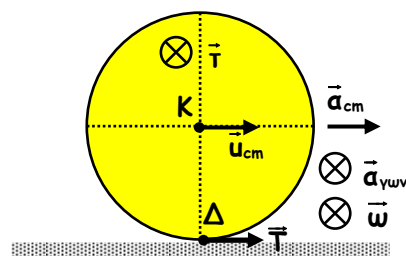
Παράδειγμα 1°

Ασκούμε οριζόντια δύναμη F στο σημείο K και ο αρχικά ακίνητος δίσκος αρχίζει να κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Η δύναμη F επειδή ασκείται στο K προκαλεί μόνο μεταφορική επιτάχυνση προς τα δεξιά. Επειδή $u_{cm} = \omega \cdot R$ η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου πρέπει να αυξάνεται. Επομένως η ροπή κάποιας δύναμης πρέπει να προκαλεί δεξιόστροφη γωνιακή επιτάχυνση. Η μόνη δύναμη που μπορεί να προκαλέσει ροπή ως προς το K είναι η στατική τριβή. Επειδή η ροπή πρέπει να είναι δεξιόστροφη η T έχει φορά προς τα αριστερά.



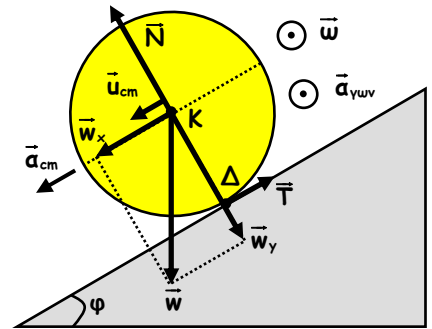
Παράδειγμα 2°

Με τη βοήθεια ζεύγους δυνάμεων ασκούμε δεξιόστροφη ροπή τ κάθετη στο επίπεδο του σχήματος και ο αρχικά ακίνητος δίσκος αρχίζει να κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Η ροπή τ προκαλεί μόνο δεξιόστροφη γωνιακή επιτάχυνση. Επειδή $u_{cm} = \omega \cdot R$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας πρέπει να αυξάνεται. Επομένως κάποια δύναμη πρέπει να προκαλεί μεταφορική επιτάχυνση προς τα δεξιά. Η μόνη δύναμη που μπορεί να προκαλέσει μεταφορική επιτάχυνση είναι η στατική τριβή, έτσι η T έχει φορά προς τα δεξιά.



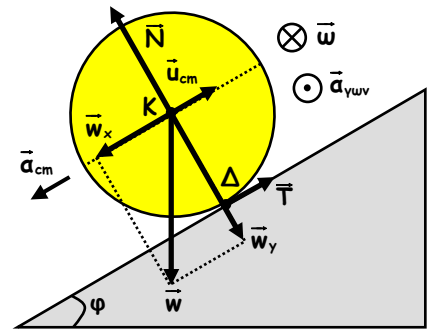
Παράδειγμα 3°

Ο αρχικά ακίνητος δίσκος αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση στο κεκλιμένο δάπεδο με την επίδραση του βάρους του. Η δύναμη W_x επειδή ασκείται στο Κ προκαλεί μόνο μεταφορική επιτάχυνση προς τα κάτω. Επειδή $u_{cm} = \omega \cdot R$ η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου πρέπει να αυξάνεται. Επομένως η ροπή κάποιας δύναμης πρέπει να προκαλεί αριστερόστροφη γωνιακή επιτάχυνση. Η μόνη δύναμη που μπορεί να προκαλέσει ροπή ως προς το Κ είναι η στατική τριβή. Επειδή η ροπή πρέπει να είναι αριστερόστροφη, η Τ έχει φορά προς τα πάνω.



Παράδειγμα 4°

Ο δίσκος του σχήματος κυλιέται επιβραδυνόμενος χωρίς ολίσθηση προς τα πάνω στο κεκλιμένο δάπεδο με την επίδραση του βάρους του. Η δύναμη W_x επειδή ασκείται στο Κ προκαλεί μόνο μεταφορική επιτάχυνση προς τα κάτω. Επειδή $u_{cm} = \omega \cdot R$ η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου πρέπει να μειώνεται. Επομένως η ροπή κάποιας δύναμης πρέπει να προκαλεί αριστερόστροφη γωνιακή επιτάχυνση. Η μόνη δύναμη που μπορεί να προκαλέσει ροπή ως προς το Κ είναι η στατική τριβή. Επειδή η ροπή πρέπει να είναι αριστερόστροφη, η Τ έχει φορά προς τα πάνω.



Παράδειγμα 5°

Με τη βοήθεια νήματος ασκούμε συνεχώς οριζόντια δύναμη $F=120\text{N}$ στο εκάστοτε ανώτερο σημείο δίσκου που ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Ο δίσκος μάζας $m=40\text{kg}$, ακτίνας $R=0,5\text{m}$ και $I=(mR^2)/2$, αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο.

Η δύναμη F προκαλεί και μεταφορική επιτάχυνση προς τα δεξιά και δεξιόστροφη γωνιακή επιτάχυνση, επομένως δεν μπορούμε να προβλέψουμε με το "μάτι" τη σωστή φορά της στατικής τριβής. Ακόμα μπορεί και να μην υπάρχει στατική τριβή, αλλά εμείς δεν το γνωρίζουμε!!!

Εδώ η σωστή φορά της στατικής αποδεικνύεται ότι είναι προς τα δεξιά. Εμείς όμως δεν το γνωρίζουμε και υποθέτουμε λανθασμένα ότι έχει φορά προς τ' αριστερά. Αφού ορίσουμε τις θετικές φορές στους δύο άξονες, έχουμε:

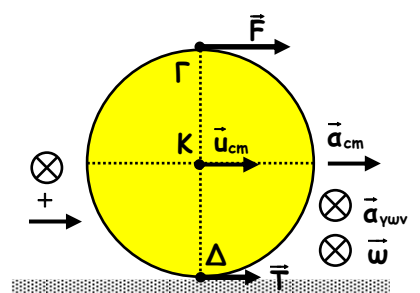
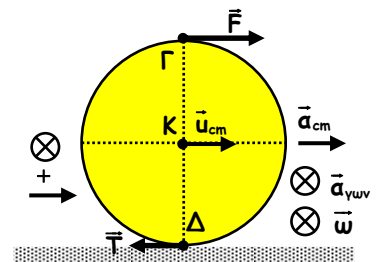
$$F - T = ma_{cm} \quad TR + FR = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$$

Μετά τις πράξεις θα βρούμε αρνητικό αποτέλεσμα για τη στατική τριβή ($T=-40\text{N}$), έχοντας όμως βρει το σωστό μέτρο.

Αν τυχαία υποθέσουμε σωστά ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά, αφού ορίσουμε "σωστά" τις θετικές φορές στους δύο άξονες έχουμε:

$$F + T = ma_{cm} \quad FR - TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$$

Μετά τις πράξεις θα βρούμε θετικό αποτέλεσμα για τη στατική τριβή ($T=40\text{N}$).



Εναλλακτικά με το σκεπτικό ότι η στατική τριβή δρα έτσι ώστε να επιτυγχάνεται κύλιση χωρίς ολίσθηση, που σημαίνει $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$, υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας a_{cm} και τη γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$, ΧΩΡΙΣ να λάβουμε υπόψη την ύπαρξη της στατικής τριβής και τη σχέση $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$.

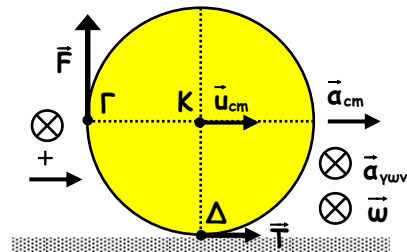
Από τις σχέσεις: $F = ma_{cm}$ και $FR = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ υπολογίζουμε $a_{cm} = 3\text{m/s}^2$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 12\text{rad/s}^2$ δηλ. $\alpha_{\gamma\omega\nu}R = 6\text{m/s}^2$

Επειδή προέκυψε $a_{cm} < \alpha_{\gamma\omega\nu}R$, σημαίνει ότι η δύναμη F χωρίς την ύπαρξη στατικής τριβής δεν μπορεί να προκαλέσει ΚΧΟ. Επομένως η στατική τριβή πρέπει να έχει τη φορά της a_{cm} , δηλ. προς τα δεξιά, έτσι ώστε ταυτόχρονα να αυξήσει την a_{cm} και να μειώσει την $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ για να ισχύει $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$.

Εάν προέκυπτε $a_{cm} > \alpha_{\gamma\omega\nu}R$, θα σημαίνει ότι η στατική τριβή έπρεπε να έχει φορά αντίθετη της a_{cm} , δηλ. προς τα αριστερά, έτσι ώστε ταυτόχρονα να αυξήσει την $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και να μειώσει την a_{cm} για να ισχύει $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$.

Παράδειγμα 6°

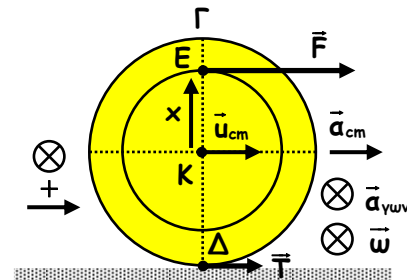
Ασκούμε συνεχώς κατακόρυφη δύναμη F στο σημείο Γ και ο αρχικά ακίνητος δίσκος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει προς τα δεξιά στο οριζόντιο δάπεδο. Η δύναμη F προκαλεί μόνο δεξιόστροφη γωνιακή επιτάχυνση. Επειδή $u_{cm} = \omega \cdot R$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας πρέπει να αυξάνεται. Επομένως κάποια δύναμη πρέπει να προκαλεί μεταφορική επιτάχυνση προς τα δεξιά. Η μόνη δύναμη που μπορεί να προκαλέσει μεταφορική επιτάχυνση είναι η στατική τριβή, έτσι η T έχει φορά προς τα δεξιά.



Παράδειγμα 7°

Διερεύνηση της φοράς της στατικής τριβής

Η δύναμη F είναι οριζόντια σταθερού μέτρου και ο φορέας της απέχει από το κέντρο μάζας x όπως φαίνεται στο σχήμα. Υποθέτουμε ότι η φορά της στατικής τριβής είναι προς τα δεξιά. Το στερεό έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος ίση με $I = \lambda \cdot MR^2$ (για κύλινδρο και δίσκο $\lambda = 1/2$, για δακτύλιο $\lambda = 1$, ενώ για σφαίρα $\lambda = 2/5$).



Αφού ορίσουμε τις θετικές φορές στους δύο άξονες, έχουμε:

$$F + T = m \cdot a_{cm} \text{ και } F \cdot x - T \cdot R = I \cdot \frac{a_{cm}}{R}. \text{ Μετά τις πράξεις προκύπτουν:}$$

$$a_{cm} = \frac{1 + \frac{x}{R}}{1 + \lambda} \cdot \frac{F}{M} \text{ και } T = \frac{\frac{x}{R} - \lambda}{1 + \lambda} \cdot F \text{ με } -R < x \leq +R.$$

Θετική τιμή του x σημαίνει ότι η F ασκείται πάνω από το κέντρο μάζας ενώ αρνητική κάτω από το κέντρο μάζας. Για $x = -R$ δεν μπορούμε να έχουμε ΚΧΟ.

Διερευνούμε τις παραπάνω σχέσεις:

Για κάθε τιμή του x , η a_{cm} είναι πάντοτε θετική, δηλ. προς τα δεξιά.

Για $x = \lambda \cdot R$ η στατική τριβή είναι μηδενική.

Για $x > \lambda \cdot R$ η στατική τριβή προκύπτει θετική, δηλ. έχει φορά προς τα δεξιά.

Για $x < \lambda \cdot R$ η στατική τριβή προκύπτει αρνητική, δηλ. έχει φορά προς τ' αριστερά.

Παρατηρούμε ότι για $x < 0$, δηλ. κάτω από το κέντρο μάζας η στατική τριβή ανεξάρτητα από τη τιμή του λ προκύπτει πάντοτε αρνητική, δηλ, έχει φορά προς τα "πίσω" (αριστερά).

Για δακτύλιο η στατική τριβή έχει πάντοτε κατεύθυνση προς τα "πίσω", εκτός από την περίπτωση που η δύναμη F ασκείται στο ανώτατο σημείο οπότε η τιμή της μηδενίζεται.

Ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματα σε πίνακα.

Δίσκος-Κύλινδρος ($\lambda = 1/2$)		Σφαίρα ($\lambda = 2/5$)		Δακτύλιος ($\lambda = 1$)	
Τιμή του x	Φορά T	Τιμή του x	Φορά T	Τιμή του x	Φορά T
$\frac{R}{2} < x \leq R$	$\rightarrow$	$\frac{2R}{5} < x \leq R$	$\rightarrow$	$x = R$	$T=0$
$x = \frac{R}{2}$	$T=0$	$x = \frac{2R}{5}$	$T=0$	$-R < x < R$	$\leftarrow$
$-R < x < \frac{R}{2}$	$\leftarrow$	$-R < x < \frac{2R}{5}$	$\leftarrow$		

Ας δούμε μια πιο σύνθετη περίπτωση

Παράδειγμα 8°

Αφήνουμε σε κεκλιμένο δάπεδο γωνίας κλίσεως φ κύλινδρο μάζας m γύρω από τον οποίο έχουμε τυλίξει λεπτό και αβαρές νήμα στο άκρο του οποίου ασκούμε δύναμη F παράλληλη στο δάπεδο όπως στο σχήμα. Δίνεται η βαρυτική επιτάχυνση g και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα του $I = (mR^2)/2$.

1. Για ποια τιμή του μέτρου της F ο κύλινδρος παραμένει **ακίνητος**;

Η στατική τριβή έχει φορά προς τα **πάνω** και μέτρο τόσο ώστε η ροπή της ως προς το K να εξουδετερώνει τη ροπή της F ως προς το ίδιο σημείο.

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F + T - w_x = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = 0 \rightarrow -F \cdot R + T \cdot R = 0 \rightarrow T = F \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \rightarrow F = w_x/2$$

2. Ενώ ο κύλινδρος είναι ακίνητος, το μέτρο της F γίνεται **μικρότερο** από $w_x/2$, οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλάει προς τα **κάτω** χωρίς να ολισθαίνει. Να βρεθεί η στατική τριβή.

Το μέτρο της ταχύτητας του cm του κυλίνδρου αυξάνεται, επομένως και η γωνιακή του ταχύτητα αυξάνεται αφού $u_{cm} = \omega \cdot R$. Επομένως η συνολική ροπή πρέπει να προκαλεί αριστερόστροφη γωνιακή επιτάχυνση.

Η ροπή της F ως προς το K είναι δεξιόστροφη, άρα η στατική τριβή έχει κατεύθυνση προς τα **πάνω**, ώστε η αριστερόστροφη ροπή της ως προς το K να συμβάλει στη διαμόρφωση της απαιτούμενης αριστερόστροφης γωνιακής επιτάχυνσης.

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{cm} \rightarrow w_x - F - T = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{γων} \rightarrow T \cdot R - F \cdot R = I \cdot a_{γων} \quad (2)$$

$$a_{cm} = a_{γων} \cdot R \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \rightarrow a_{cm} = \frac{2(w_x - 2F)}{3 \cdot m}$$

$$T = \frac{w_x + F}{3}$$

3. Ενώ ο κύλινδρος είναι ακίνητος, το μέτρο της F γίνεται **μεγαλύτερο** από $w_x/2$ οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλάει προς τα **πάνω** χωρίς να ολισθαίνει. Να βρεθεί η στατική τριβή.

Το μέτρο της ταχύτητας του cm του κυλίνδρου αυξάνεται, επομένως και η γωνιακή του ταχύτητα αυξάνεται αφού $u_{cm} = \omega \cdot R$. Επομένως η συνολική ροπή πρέπει να προκαλεί δεξιόστροφη γωνιακή επιτάχυνση. Η φορά της στατικής τριβής τώρα είναι άγνωστη, διότι η ροπή της F ως προς το K προκαλεί δεξιόστροφη γωνιακή επιτάχυνση. Επομένως αναγκαστικά **υποθέτουμε** ότι η T έχει φορά έστω προς τα **πάνω**.

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{cm} \rightarrow F + T - w_x = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{γων} \rightarrow F \cdot R - T \cdot R = I \cdot a_{γων} \quad (2)$$

$$a_{cm} = a_{γων} \cdot R \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \rightarrow a_{cm} = \frac{2(2F - w_x)}{3 \cdot m}$$

$$T = \frac{w_x + F}{3} > 0$$

Επειδή προέκυψε $T > 0$, υποθέσαμε σωστά.

Αν είχαμε υποθέσει λανθασμένα, θα προέκυπτε $T < 0$ με **σωστή** τιμή του μέτρου.

