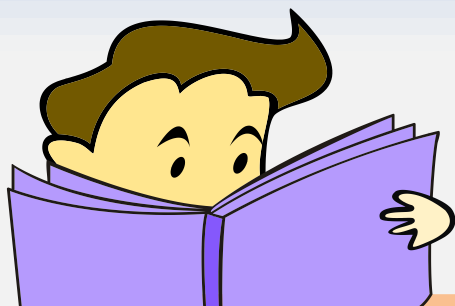




ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γυμνασίου

Γεωμετρία

Κεφάλαιο 1^ο





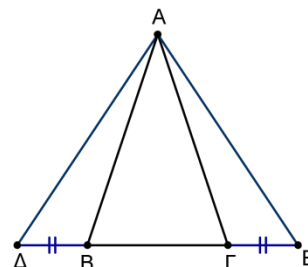
ΜΑΘΗΜΑ Α1.1 Ισότητα τριγώνων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1)

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=AG$. Προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ κατά ίσα τμήματα $BD=BE$.

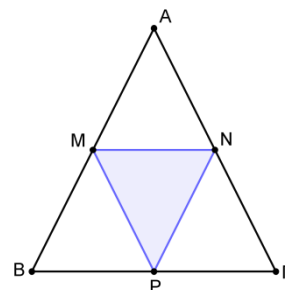
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



2)

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$, θεωρούμε M , N και P τα μέσα των πλευρών του.

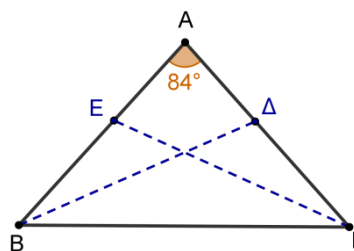
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MNP είναι ισοσκελές.



3)

Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ έχει γωνία κορυφής $\hat{A} = 84^\circ$.

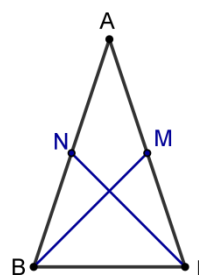
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου,
β) Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE είναι ίσες.



4)

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$, θεωρούμε M και N τα μέσα των πλευρών του AG και AB .

Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι BM και ΓN είναι ίσες.

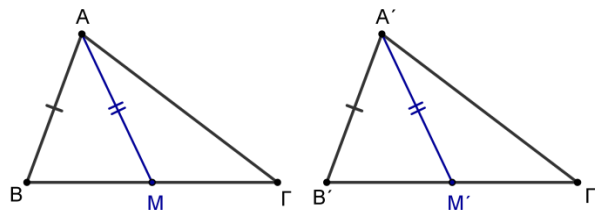


5)

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του διπλα-νού σχήματος έχουν $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και ίσες διάμεσες $AM = A'M'$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \hat{B}'$,

β) Να αποδείξετε ότι $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$.

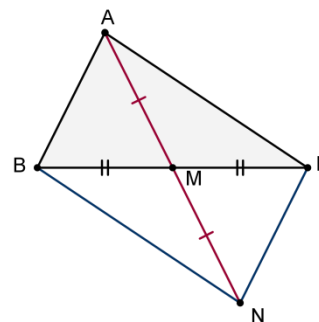


6)

Στο διπλανό σχήμα η διάμεσος AM έχει προεκταθεί κατά τμήμα $MN=AM$.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\triangle ABM$ και $\triangle MNG$ και να δείξετε ότι $NG = AB$.

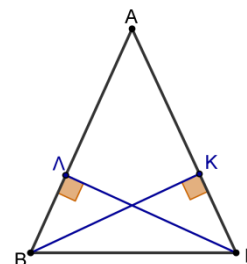
β) Να αποδείξετε ότι $BN = AG$.



7)

Σε ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB=AG$, θεωρούμε τα ύψη BK και GL προς τις ίσες πλευρές του.

Να αποδείξετε ότι τα ύψη BK και GL που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.

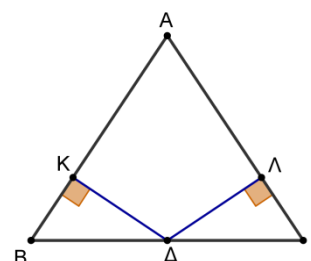


8)

Σε ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB=AG$, από το μέσο Δ της βάσης BG φέρουμε $\Delta K \perp AB$ και $\Delta L \perp AG$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta K = \Delta L$ και

β) Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{K\Delta L}$.

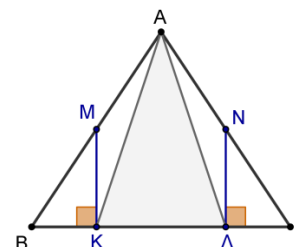


9)

Σε ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB=AG$, από τα μέσα M και N των ίσων πλευρών του, φέρουμε τις αποστάσεις MK και NL , από τη βάση BG του τριγώνου.

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισαπέχουν από τη βάση του τριγώνου.

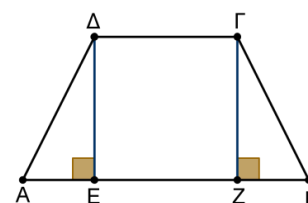
β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο AKL είναι ισοσκελές.



10)

Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο $ABG\Delta$ με $AB \parallel G\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ φέρουμε τα ύψη ΔE και ΓZ . Να αποδείξετε

ότι: α) $AE = ZB$ και β) $AE = \frac{AB - G\Delta}{2}$

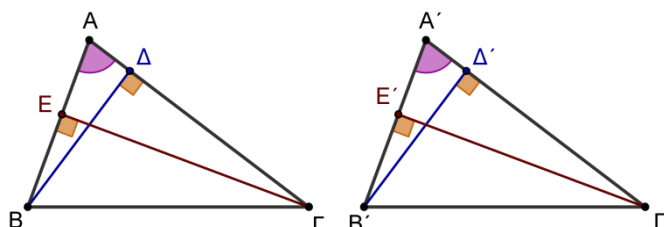


11)

Δυο τρίγωνα ABG και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\widehat{A} = \widehat{A'}$, ίσα ύψη $B\Delta = B'\Delta'$ και $\Gamma E = \Gamma'E'$. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = A'B'$, β) $AG = A'\Gamma'$ και

γ) $\triangle ABG = \triangle A'B'\Gamma'$



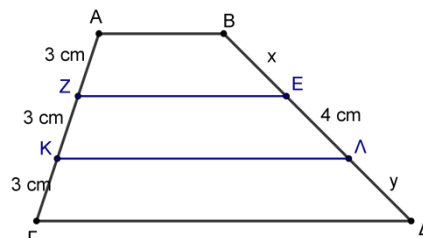


ΜΑΘΗΜΑ Α1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

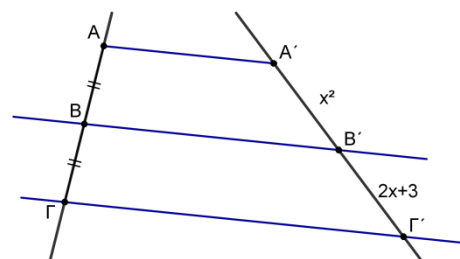
1)

Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με $AB \parallel \Gamma\Delta$. Οι παράλληλες στις βάσεις του τραπέζιου ZE και KL χωρίζουν την $A\Gamma$ σε τρία ίσα μέρη. Να βρείτε τα x και y .



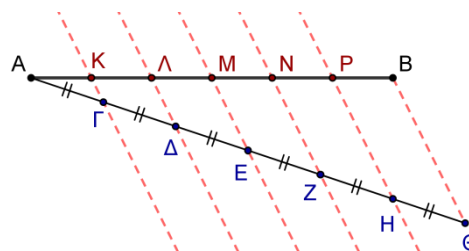
2)

Στο διπλανό σχήμα οι παράλληλες AA' , BB' και $\Gamma\Gamma'$ ορίζουν στην $A\Gamma$ δυο ίσα τμήματα $AB=B\Gamma$. Αν $A'B'=x^2$ και $B'\Gamma'=2x+3$, να υπολογίσετε την τιμή του x και τα μήκη των $A'B'$ και $B'\Gamma'$.



3)

Στο διπλανό σχήμα $AB=5\text{cm}$ και $\Gamma K \parallel \Delta\Lambda \parallel EM \parallel ZN \parallel HP \parallel \Theta B$. Να υπολογίσετε τα τμήματα AK , $A\Lambda$, AM , AN και AP .

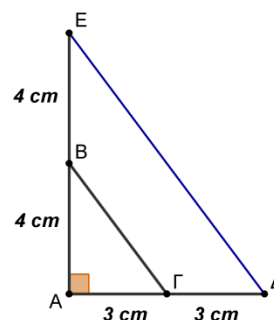


4)

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$. Προεκτείνουμε τις AB και $A\Gamma$ κατά ίσα τμήματα. Να υπολογίσετε:

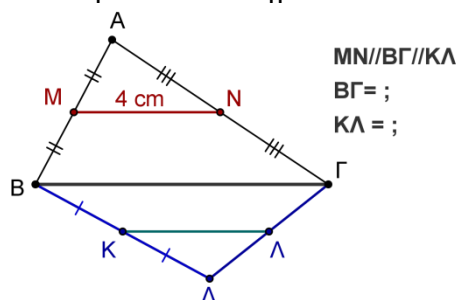
α) τα μήκη των $B\Gamma$ και ΔE

β) του λόγους $\frac{AB}{B\Gamma}$, $\frac{AB}{A\Gamma}$, $\frac{A\Delta}{AE}$, $\frac{AB}{\Delta E}$ και $\frac{\Delta E}{B\Gamma}$,

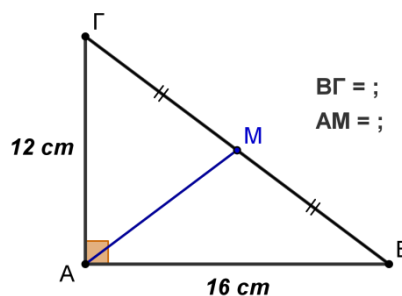


5)

Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα ζητούμενα τμήματα.



$MN \parallel B\Gamma \parallel KL$
 $B\Gamma = ;$
 $KL = ;$



$B\Gamma = ;$
 $AM = ;$

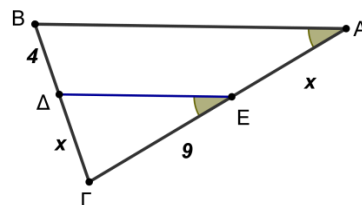
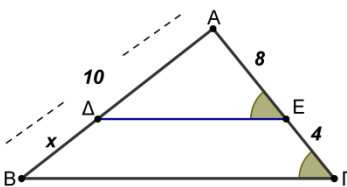
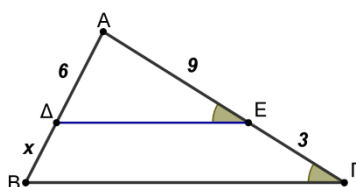


ΜΑΘΗΜΑ Α1.3 Θεώρημα του Θαλή

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε το x σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα:

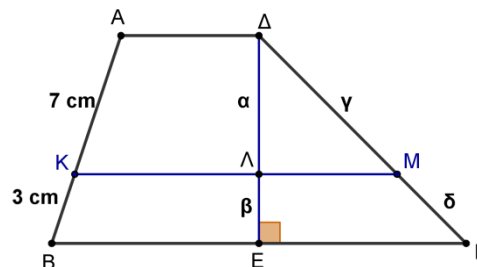
1)



2)

Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ έχουμε $ΚΛ//ΒΓ$, $ΔΕ=8\text{cm}$ και $ΔΓ=13\text{cm}$.

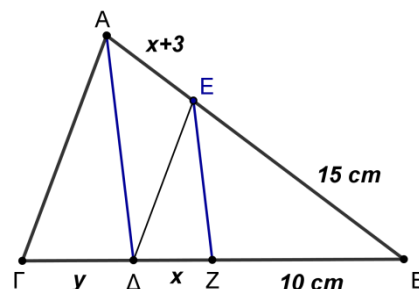
Να υπολογίσετε τα μήκη α , β , γ και δ .



3)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΕΔ//ΒΑ$ και $ΕΖ//ΑΔ$.

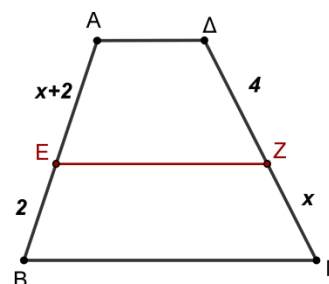
Να υπολογίσετε τα x και y .



4)

Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ έχουμε την ΕΖ παράλληλη στις βάσεις του τραpezίου.

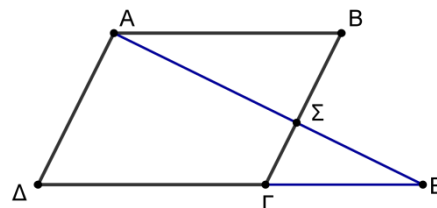
Να υπολογίσετε το μήκος x .



5)

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με $ΑΔ = 18\text{cm}$.

Θεωρούμε σημείο Σ στην ΒΓ ώστε $ΣΓ = 6\text{cm}$ και $ΣΕ = 13\text{cm}$. Να βρείτε τα ΣΑ και ΣΒ.



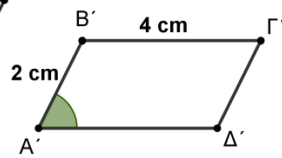
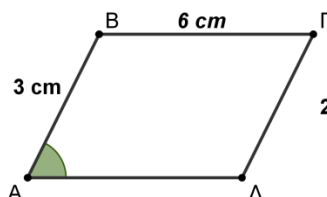
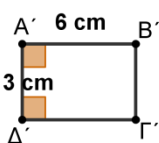
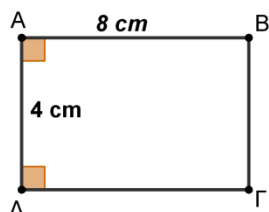


ΜΑΘΗΜΑ Α1.5 Α. Όμοια πολύγωνα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

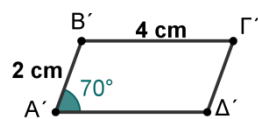
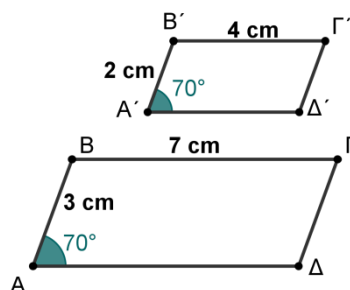
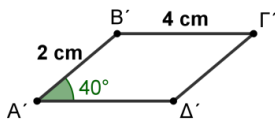
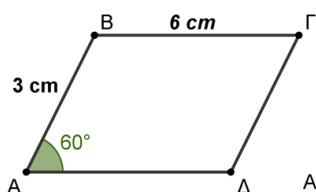
1)

Να εξετάσετε ως προς την ομοιότητα τα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ των παρακάτω σχημάτων και σε αυτά που είναι όμοια να βρείτε το λόγο ομοιότητας τους.



2)

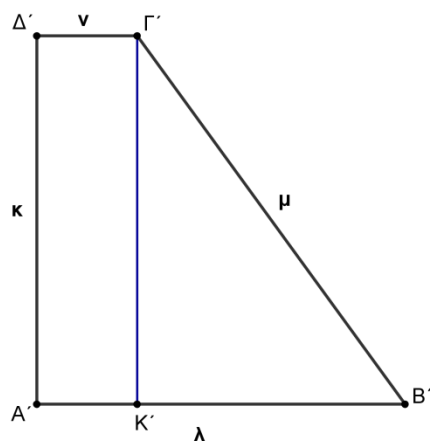
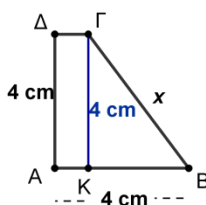
Να εξετάσετε ως προς την ομοιότητα τα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ των παρακάτω σχημάτων και σε αυτά που είναι όμοια να βρείτε το λόγο ομοιότητας τους.



3)

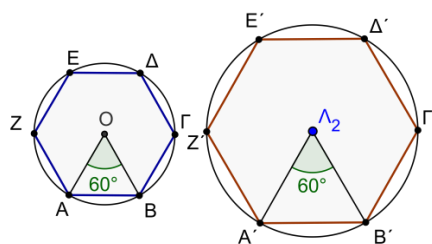
Τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $1/3$.

Να υπολογίσετε τα μήκη x , κ , λ , μ και ν .



4)

Να αποδείξετε ότι δύο κανονικά εξάγωνα $AB\Gamma\Delta\epsilon\zeta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'E'Z'$ εγγεγραμμένα σε κύκλους ακτίνων 2 cm και 3 cm είναι όμοια.



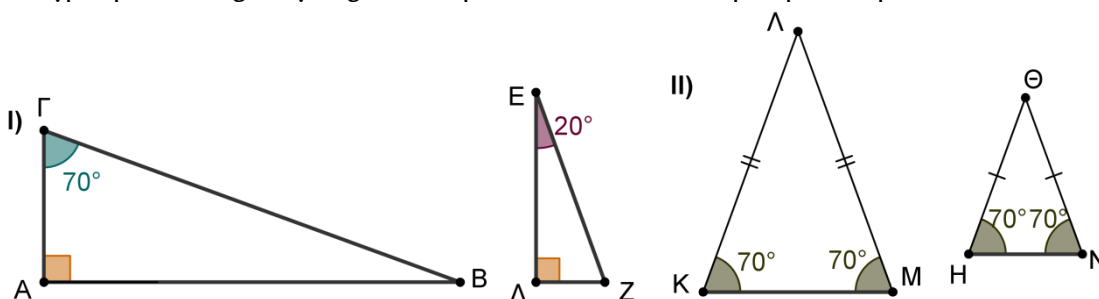


ΜΑΘΗΜΑ Α1.5 Β. Όμοια τρίγωνα

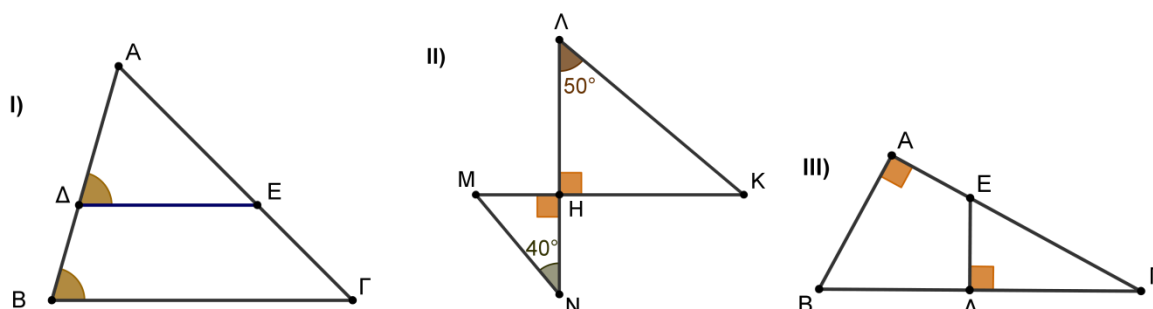
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να δείξετε ότι τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και σε κάθε περίπτωση να γράψετε τους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα.

1)

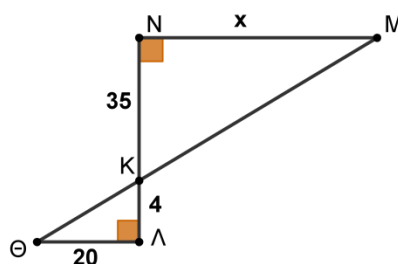


2)



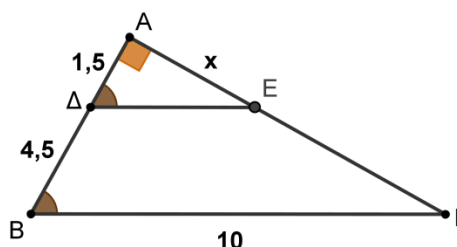
3)

Να βρείτε το μήκος x στο διπλανό σχήμα.



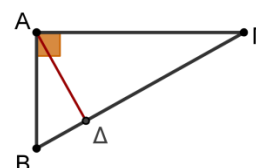
4)

Στο διπλανό σχήμα:
α) Να βρείτε την πλευρά $ΑΓ$ του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$.
β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια και να βρείτε το x .



5)

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το $ΑΔ$ είναι το ύψος στην υποτείνουσα $ΒΓ$.
α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΔΓ$ είναι όμοια
β) Να δείξετε ότι $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$

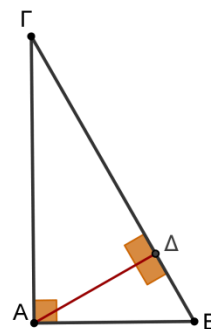


6)

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ το $A\Delta$ είναι το ύψος στην υποτείνουσα $B\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και ότι $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$

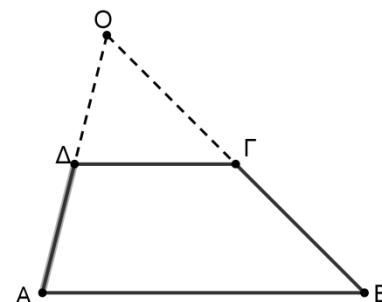
β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και ότι $A\Gamma^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma$



7)

Στο διπλανό τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ οι μη παράλληλες πλευρές του $A\Delta$ και $B\Gamma$ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο O .

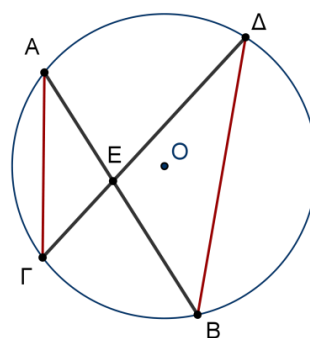
Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAB και $O\Delta\Gamma$ είναι όμοια και ότι $OA \cdot O\Gamma = O\Delta \cdot OB$



8)

Στο διπλανό κύκλο (O, ρ) οι χορδές του AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο E .

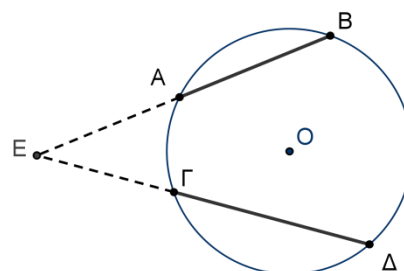
Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $E\Delta B$ είναι όμοια και ότι $EA \cdot EB = E\Gamma \cdot E\Delta$



9)

Στο διπλανό κύκλο (O, ρ) οι προεκτάσεις των χορδών του AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $E\Delta A$ είναι όμοια και ότι $EA \cdot EB = E\Gamma \cdot E\Delta$



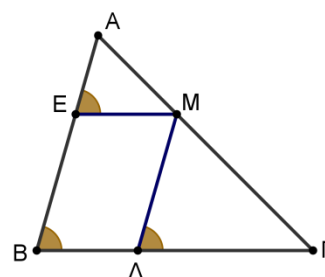
10)

Στο διπλανό τρίγωνο είναι $EM \parallel B\Gamma$ και $M\Delta \parallel AB$.
Να δείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα AEM και $AB\Gamma$ είναι όμοια $\frac{EM}{B\Gamma} = \frac{AM}{A\Gamma}$

β) τα τρίγωνα $M\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια $\frac{\Delta M}{AB} = \frac{M\Gamma}{A\Gamma}$

γ) $\frac{EM}{B\Gamma} + \frac{\Delta M}{AB} = 1$



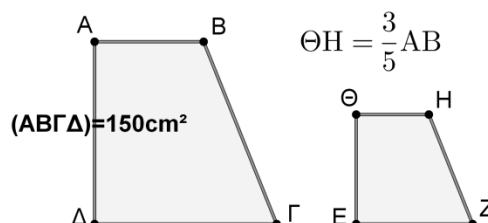


ΜΑΘΗΜΑ Α1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

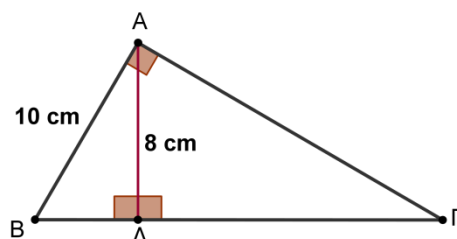
1)

Στο διπλανό σχήμα το τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδό 150 cm^2 . Το τραπέζιο ΕΖΗΘ είναι όμοιο με αυτό και κάθε πλευρά του είναι τα $\frac{3}{5}$ της πλευράς του ΑΒΓΔ. Να βρείτε το εμβαδό (ΕΖΗΘ).



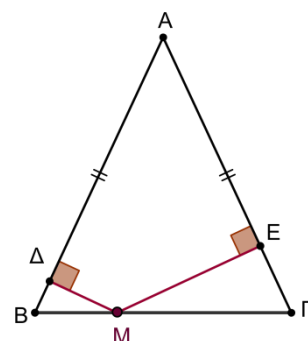
2)

Στο διπλανό σχήμα το ΑΔ είναι το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.
α) Να βρείτε την ΒΔ και το εμβαδό (ΑΒΔ)
β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε τα εμβαδά (ΑΒΓ) και (ΑΔΓ).



3)

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=AG$ είναι $MG=3MB$, $M\Delta\perp AB$ και $ME\perp AG$.
α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι όμοια και $(MEG)=9(M\Delta B)$
β) Αν το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι 20 cm^2 να βρείτε το εμβαδό καθενός.

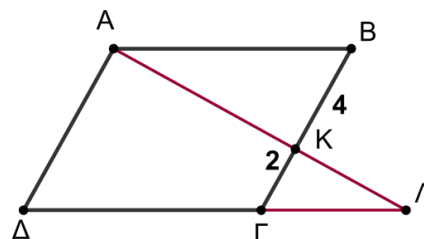


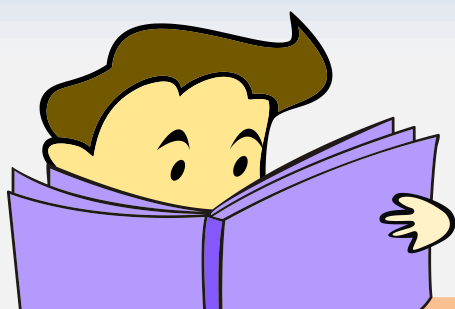
4)

Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 4cm και 9 cm. Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός άλλου ορθογωνίου όμοιου προς αυτό με διπλάσιο εμβαδόν.

5)

Στο διπλανό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το σημείο Κ της ΒΓ είναι τέτοιο ώστε $K\Gamma=2$ και $KB=4$.
α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΛ και ΑΒΚ είναι το καθένα όμοιο με το ΚΓΛ
β) Να βρείτε τους λόγους $\frac{(A\Delta\Lambda)}{(K\Gamma\Lambda)}$, $\frac{(ABK)}{(K\Gamma\Lambda)}$ και να δείξετε ότι $(AB\Gamma\Delta)=12(K\Gamma\Lambda)$





ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γυμνασίου

Τριγωνομετρία

Κεφάλαιο 2^ο

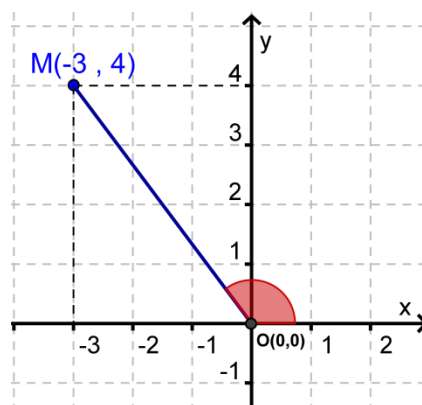




ΜΑΘΗΜΑ Α2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

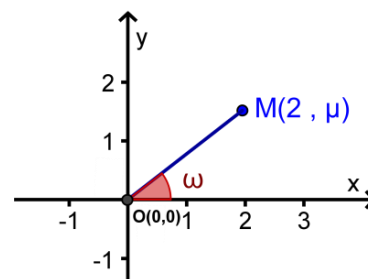
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Στο διπλανό σχήμα έχουμε το σημείο $M(-3, 4)$ στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οxy. Αν $\omega = \angle xOM$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\epsilon\varphi\omega$.



- 2) Δίνεται η ευθεία της διχοτόμου του 1^{ου} τεταρτημορίου με εξίσωση: $y = x$
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M της ευθείας που έχει τεταγμένη 1.
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \angle xOM$.

- 3) Στο διπλανό σχήμα είναι $\epsilon\varphi\omega = 0,75$ και η τεταγμένη του σημείου M είναι 2.
- α) Να βρείτε την τεταγμένη μ ,
β) Να βρεθούν τα $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$.



- 4) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
 $A = \eta\mu 0^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ \cdot (1 + \epsilon\varphi 0^\circ)$, $B = \eta\mu 90^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 90^\circ \cdot (1 + \epsilon\varphi 180^\circ)$,
 $\Gamma = (1 + \eta\mu 0^\circ) \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu 90^\circ) \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu^2 180^\circ)$, $\Delta = \frac{\eta\mu 90^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ}{(1 + \epsilon\varphi 0^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ}$.

- 5) Να βρείτε τα πρόσημα των παρακάτω αριθμών:
 $\alpha = \eta\mu 18^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 108^\circ$, $\beta = \eta\mu 92^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 32^\circ$, $\gamma = \epsilon\varphi 87^\circ \cdot \epsilon\varphi 187^\circ$,
 $\delta = \eta\mu 26^\circ - \sigma\upsilon\nu 100^\circ$, $\epsilon = \epsilon\varphi 147^\circ + \sigma\upsilon\nu 129^\circ$

- 6) Αν η γωνία ω είναι οξεία και η γωνία φ αμβλεία, τότε
- α) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \epsilon\varphi\omega \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$,
β) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\varphi > \sigma\upsilon\nu\varphi$
γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha = \eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi$ και $\beta = 2\sigma\upsilon\nu\varphi + \epsilon\varphi\varphi$

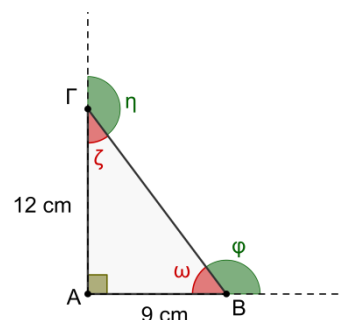
- 6) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή των παραστάσεων:
 $A = 3\eta\mu x + 2$, $B = 4 - 2\sigma\upsilon\nu x$ και $\Gamma = 2\eta\mu x - 5\sigma\upsilon\nu x$



ΜΑΘΗΜΑ Α2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να αποδείξετε ότι:
 $\eta\mu 100^\circ = \eta\mu 80^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 100^\circ = -\sigma\upsilon\nu 80^\circ$, $\epsilon\varphi 100^\circ = -\epsilon\varphi 80^\circ$,
 $\eta\mu 147^\circ = \eta\mu 33^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 147^\circ = -\sigma\upsilon\nu 33^\circ$, $\epsilon\varphi 147^\circ = -\epsilon\varphi 33^\circ$
- 2) Να αποδείξετε ότι:
 $\eta\mu 130^\circ + \sigma\upsilon\nu 140^\circ - \eta\mu 50^\circ + \sigma\upsilon\nu 40^\circ = 0$, $2 \cdot \eta\mu 150^\circ \cdot \epsilon\varphi 26^\circ + \epsilon\varphi 154^\circ = 0$,
 $\epsilon\varphi 135^\circ \cdot \epsilon\varphi 78^\circ - 2 \cdot \epsilon\varphi 102^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ = 0$,
- 3) Να αποδείξετε ότι:
 $\sigma\upsilon\nu^2 110^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 70^\circ = 0$, $\epsilon\varphi^2 64^\circ - \epsilon\varphi^2 116^\circ = 0$, $\eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 30^\circ = 1$,
 $\eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 135^\circ + \eta\mu^2 150^\circ = \frac{3}{2}$, $\sigma\upsilon\nu^2 120^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 135^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 150^\circ = \frac{3}{2}$
- 4) Να αποδείξετε ότι:
 $\eta\mu(124^\circ - \omega) - \eta\mu(56^\circ + \omega) = 0$, $\sigma\upsilon\nu(160^\circ + \varphi) + \sigma\upsilon\nu(20^\circ - \varphi) = 0$,
 $\epsilon\varphi(100^\circ + x) = -\epsilon\varphi(80^\circ - x)$
- 5) Να λύσετε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις:
 $\eta\mu x = 0$, $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu x = \eta\mu 50^\circ$, $\eta\mu x = 1$,
 $\sigma\upsilon\nu x = 0$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 50^\circ$,
 $\sigma\upsilon\nu x = 1$, $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 150^\circ$, $\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$, $\epsilon\varphi x = \sqrt{3}$, $\epsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 6) Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:
 $\eta\mu(A+B) = \eta\mu\Gamma$, $\sigma\upsilon\nu(A+B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $\epsilon\varphi(A+B) = -\epsilon\varphi\Gamma$,
 $\eta\mu(B+\Gamma) = \eta\mu A$, $\sigma\upsilon\nu(A+\Gamma) = -\sigma\upsilon\nu B$, $\epsilon\varphi(A+\Gamma) = -\epsilon\varphi B$
- 7) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών φ , η του τριγώνου ΑΒΓ.





ΜΑΘΗΜΑ Α2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- 2) Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- 3) Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{11}}{6}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- 4) Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\epsilon\varphi\omega = 2\sqrt{2}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- 5) Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\epsilon\varphi\omega = -\sqrt{15}$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\eta\mu\omega \cdot \epsilon\varphi\omega - 0,75}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.
- 6) Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $0^\circ < \omega < 90^\circ$ τότε $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \eta\mu^2\omega}$ και $\eta\mu\omega = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}$
β) Αν $90^\circ < \omega < 180^\circ$ τότε $\sigma\upsilon\nu\omega = -\sqrt{1 - \eta\mu^2\omega}$ και $\eta\mu\omega = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}$
- 7) Να αποδείξετε ότι:
α) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\varphi x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$, β) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \cdot \epsilon\varphi x = 1$
- 8) Να αποδείξετε ότι:
α) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\varphi x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$, β) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \cdot \epsilon\varphi x = 1$
- 9) Να αποδείξετε ότι:
α) $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, β) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$
γ) $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2$, δ) $5\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 5$
ε) $\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x$, στ) $\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = 2\eta\mu^2 x$
ζ) $\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \epsilon\varphi^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$
- 10) Να αποδείξετε ότι: $(2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x)^2 + (3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x)^2 = 13$

- 11) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = 2\eta\mu^2 x - 1 = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$
 Να αποδείξετε ότι:
- α) $\frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = 1 - \sigma\upsilon\nu x$ και $\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = 1 + \sigma\upsilon\nu x$
- 12) β) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} = 1 - \eta\mu x$ και $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 - \eta\mu x} = 1 + \eta\mu x$
 γ) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 - \eta\mu x} = 2$
- 13) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$
- 14) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} - \frac{1 - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2 \cdot \epsilon\phi x$
- 15) Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\phi x + \frac{1}{\epsilon\phi x} = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$
- 16) Να αποδείξετε ότι: $1 + \frac{1}{\epsilon\phi^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$
- 17) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2 x = \frac{\epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x}$
- α) Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x}$
- 18) β) Αν για την αμβλεία γωνία x ισχύει $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x , με τη βοήθεια της σχέσης που δείξατε στο (α) ερώτημα.
- 19) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$
 Αν ναι να βρείτε το είδος της γωνίας ω ;
- 20) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = 0,5$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = -0,5$
 Αν ναι να βρείτε το είδος της γωνίας ω ;



ΜΑΘΗΜΑ Α2.4 Α. Νόμος των ημιτόνων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

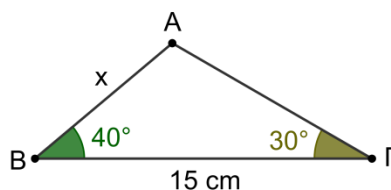
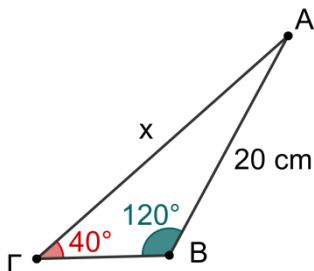
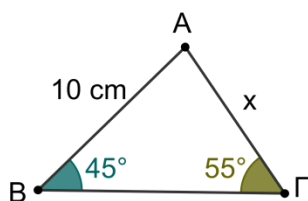
Να υπολογίσετε το x σε κάθε περίπτωση:

α)

β)

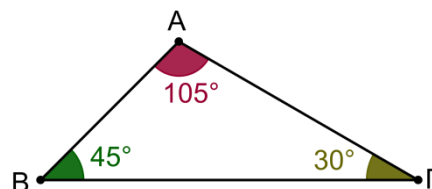
γ)

1)



2)

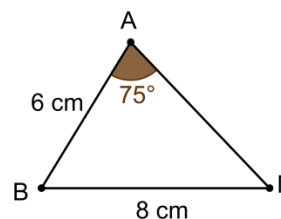
Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ δίνονται τα μέτρα των γωνιών του και η πλευρά $AB = 2\sqrt{2}$ cm, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του AG και BG.



3)

Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ δίνονται τα μήκη των πλευρών του $AB = 6$ cm και $BΓ = 8$ cm και το μέτρο της γωνίας A.

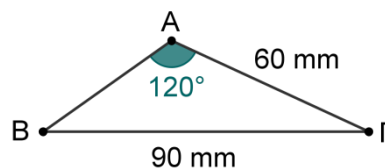
Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών B και Γ σε μοίρες.



4)

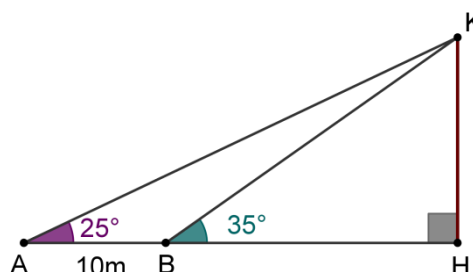
Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ δίνονται τα μήκη των πλευρών του $AG = 60$ mm και $BΓ = 90$ mm και το μέτρο της γωνίας $\hat{A} = 120^\circ$.

Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών B και Γ σε μοίρες.



5)

Στο διπλανό σχήμα το σημείο K φαίνεται από το σημείο A υπό γωνία 25° και από το σημείο B υπό γωνία 35° . Αν τα σημεία A, B απέχουν 10m να υπολογίσετε το ύψος KH.



6)

Σε τρίγωνο ABΓ με γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, $a = 30$ cm και $\gamma = 35$ cm, να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου.

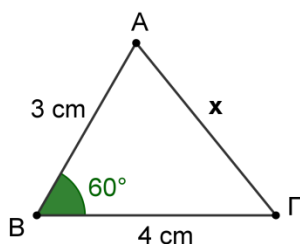


ΜΑΘΗΜΑ Α2.4 Α. Νόμος των συνημιτόνων

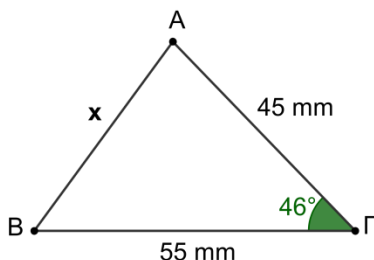
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε το x σε κάθε περίπτωση:

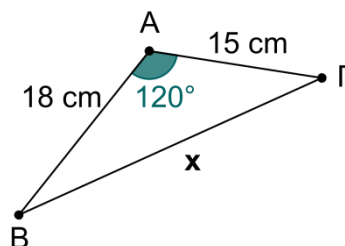
α)



β)



γ)



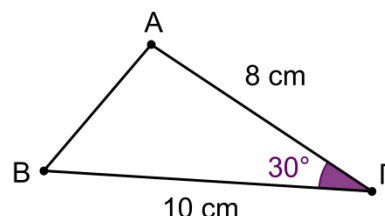
1)

Στο διπλανό σχήμα οι πλευρές $AΓ = 8\text{ cm}$ και $BΓ = 10\text{ cm}$ ενώ η γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

2)

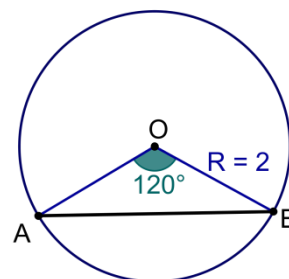
α) Να υπολογίσετε το μήκος της AB

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{A}$.



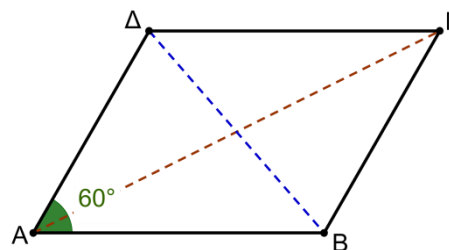
3)

Στο διπλανό σχήμα το σημείο O είναι το κέντρο του κύκλου ακτίνας 2 cm . Αν η γωνία των ακτινών $\hat{AOB} = 120^\circ$ να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AB .



4)

Στο διπλανό σχήμα το παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ έχει πλευρές $AB = 10\text{ cm}$ και $AΓ = 8\text{ cm}$. Αν η γωνία του $\hat{A} = 60^\circ$ να βρείτε τα μήκη των διαγωνίων του $AΓ$ και $BΔ$.



Να βρείτε τις γωνίες ενός τριγώνου $ABΓ$ όταν:

5)

α) $\hat{A} = 60^\circ$, $\alpha = 2\sqrt{3}$ και $\beta = 2$

β) $\hat{B} = 135^\circ$, $\beta = 3\sqrt{2}$ και $\gamma = 3$