
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 Το γραμμικό σύστημα 2×2

1.1 Να εξετάσετε αν τα ζεύγη $(\sqrt{2}, -9)$, $(\frac{10}{\sqrt{2}}, 3)$, $(\sqrt{8}, -3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{3}y = 4$. Μετά να βρείτε μία άλλη λύση της εξίσωσης.

1.2 Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2(x-3) - 3(y+1) = 5x \\ -(y-3x) + 2 = -11y \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{2x-y}{4} - \frac{y-3}{2} = x - \frac{1}{6} \\ 2(y-1) + x = 1 \end{cases}$$

1.3 Να λυθούν τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} y - \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} \\ \frac{1}{4}(x-4y) + 6 = x - y \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} 8325x + 8326y = 1 \\ 8324x + 8325y = 1 \end{cases}$$

1.4 Να λυθούν τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} (x+2)(y+1) = (x-3)(y-4) \\ (2x+3)(3y+4) = 2(3x+2)(y+1) \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} \frac{3x-4}{3y+5} = \frac{4x-9}{4y+3} \\ 3(x-2) - 5(y+3) = -10 \end{cases}$$

1.5 Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 + 5x = (x+3)^2 + (y-1)^2 + 4y \\ 3(x+y) + 5(y-1) = x+1 \end{cases}$$

1.6 Να λυθούν τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} 43x - 39y = 125 \\ 14x + 35y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} (\sqrt{3}-2)x + 2y = \sqrt{3} \\ 5x + (\sqrt{3}+2)y = 7 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} (\sqrt{5}+3)x + (\sqrt{5}-3)y = 9 + \sqrt{5} \\ 4y - 9x + 22 = 0 \end{cases}$$

1.7 Να λυθούν τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 5 \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 2 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3} \cdot y = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{2} \cdot y = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{cases}$$

1.8 Να βρεθούν τα α, β αν το σύστημα
$$\begin{cases} (\alpha-2)x - (\alpha+1)y = 3\alpha - \beta + 1 \\ (2\alpha - \beta)x + (\beta-1)y = 2\alpha - 3\beta - 1 \end{cases}$$
 έχει λύση την $(x, y) = (2, -3)$.

1.9 Να βρείτε τους α, β , αν τα συστήματα:

$$\begin{cases} 5x + 4y + 7 = 0 \\ 12 + 2x = 3y \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} (\beta - \alpha)x + (3\alpha - 2\beta)y = \alpha - 3 \\ (\beta + 1)x - (\alpha + 1)y = 2 - 5\alpha - 2\beta \end{cases}$$

έχουν κοινή λύση.

1.10 α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 3)$ και $(5, -4)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_2 που διέρχεται από τα σημεία $(\frac{2}{3}, -3)$ και $(6, 5)$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 .

1.11 Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 11. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του παίρνουμε αριθμό μικρότερο κατά 63. Ποιος είναι ο αριθμός;

1.2 Το γραμμικό σύστημα 3×3

1.12 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.

2. Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα 3×3 μπορεί να έχει λύση την $(5\kappa, 2\kappa + 1, \kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

1.13 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \begin{cases} 2x - 5y + 6z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \\ 4x - y + 9z = 0 \end{cases} & \beta) \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y - 6z = 0 \end{cases} & \gamma) \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{cases} \end{array}$$

1.14 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = -6 \\ 3x - 5y + 4z = 10 \end{cases} & \beta) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 4y + z = 3 \\ 7x + 14y + 11z = 7 \end{cases} & \gamma) \begin{cases} -x + 3y + 8z = 9 \\ 4x + 3y + 4z = 15 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \end{array}$$

1.15 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $f(-1) = 4$, $f(\frac{1}{2}) = -5$, και $f(-2) = 15$.

α) Να βρείτε τα α, β, γ .

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

1.16 Δύο μαθητές έλυσαν ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους x, y, z και βρήκαν ότι έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Ο πρώτος έδωσε απάντηση $(x, y, z) = (3\lambda - 1, \frac{\lambda-1}{2}, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ενώ ο δεύτερος έδωσε απάντηση $(x, y, z) = (\kappa, \frac{\kappa-2}{6}, \frac{\kappa+1}{3})$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Τα δύο σύνολα λύσεων είναι ίσα ή διαφορετικά;

$$\text{1.17 Να λύσετε το σύστημα: } \begin{cases} -x + 3y + 2z = 3 \\ 16x + 9y + 13z = 54 \\ 6x + y + 3z = 16 \end{cases}$$

1.3 Συστήματα που ανάγονται σε γραμμικά

$$\text{1.18 Να λυθεί το σύστημα: } \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \\ 7x - 2y - z = 12 \end{cases}$$

1.19 Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} 5x - 6y + 28 = 0 \\ |4x - 3y| = 17 \end{cases} \quad \text{ii) } |3x - y + 6| = |5y - 8x + 18| = 19$$

1.20 Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 5 \\ x^2 = 2(y^2 - 1) \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 7x^2 - 3y^2 = 1 \\ 5x^2 + 4y^2 = 56 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 14\sqrt{x} - 19\sqrt{y} + 43 = 0 \\ 5\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + 13 \end{cases}$

1.21 Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \frac{3}{4x + 5y - 8} - \frac{4}{3y - 2x + 1} = \frac{2}{15} \\ \frac{3}{4x + 5y - 8} + \frac{4}{3y - 2x + 1} = \frac{23}{18} \end{cases}$

1.22 Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{20}{y} = 11 \\ \frac{x}{70} - \frac{y}{30} = 29 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 7xy + yz - 2zx = -7xyz \\ -3xy + 5yz + 12zx = 14xyz \\ -3xy + 2yz - 6zx = 2xyz \end{cases}$

1.23 Να λυθεί το σύστημα: $\frac{5xy}{x+y} = 6$, $\frac{7yz}{y+z} = 10$, $\frac{8zx}{z+x} = 15$

1.24 Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 - 3y^2 - 10x + 24 = 0 \\ x^2 + 9y^2 - 10x = -12 \end{cases}$

1.4 Μη γραμμικά συστήματα

1.25 Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} y = \frac{9}{2}x^2 \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^2 = 3y - 6 \\ 2x^2 + y^2 = 43 \end{cases}$

1.26 Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -10 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$

1.27 Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $26cm$ και εμβαδόν $40cm^2$. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογώνιου.

1.28 Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $42cm$ και η διαγώνιός του ισούται με $15cm$. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογώνιου.

1.29 Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 12 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

1.30 Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{17}{4} \\ xy = 4 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \\ x - y = 1 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

1.31 Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2x(x-1) + y(y+1) = 3xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^3 - 6y^3 + 3x^2y^2 - 2xy = 0 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$

1.32 Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^6 + y^6 = 65 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μονοτονία συνάρτησης

2.1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^5 - \frac{2}{x^3}$, ως προς τη μονοτονία.

2.2 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$, ως προς τη μονοτονία.

2.3 Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Ακρότατα συνάρτησης

2.4 Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = 8(1-x)^4 - 5$

ii) $g(x) = 9 - 4(3x-2)^4$

iii) $h(x) = \frac{6}{x^2+3}$

iv) $\varphi(x) = \frac{5}{(x+3)^2+4}$

v) $k(x) = \frac{12}{|x-7|+4}$

vi) $F(x) = -\frac{2}{\sqrt[4]{x+1}+6}$

2.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 11x + 16}{x^2 - 3x + 3}$. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι το -3 και η μέγιστη τιμή της το $\frac{19}{3}$.

2.6 Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης: $f(x) = |x-2| - x - 1$.

2.7 Να βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης: $f(x) = \frac{4}{|x-5|+x-3}$.

2.8 Έστω $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$, με $x > 0$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

Άρτια - Περιττή συνάρτηση

2.9 Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις:

i) $f(x) = \frac{x+x^3}{x^2-1}$

ii) $g(x) = \frac{|x|}{x^3-x}$

iii) $h(x) = \sqrt{x^2-16}$

iv) $\varphi(x) = \frac{5|x|}{\sqrt[3]{2-x^2}}$

v) $k(x) = \sqrt{1-x-x^2} + \sqrt{1+x+x^2}$

Κατακόρυφη - Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

2.10 Να σχεδιάσετε τις γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ||x|-1|$.

2.11 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x-3| - 1$ και $g(x) = 1 - |x-2|$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που δημιουργείται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

3.1 Θεωρούμε το σημείο $M(-2, -2\sqrt{2})$ στο καρτεσιανό επίπεδο. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\theta = x\hat{O}M$.

3.2 Η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(-\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

3.3 Αν $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ και η τελική πλευρά της γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $N(p, -\frac{12}{13})$, να βρεθεί ο p και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας θ .

3.4 Να υπολογίσετε τους επόμενους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu 1470^\circ$

β) $\epsilon\phi 2565^\circ$

γ) $\sigma\upsilon\nu 4500^\circ$

δ) $\sigma\phi 1350^\circ$

ε) $\epsilon\phi \frac{49\pi}{6}$

στ) $\sigma\upsilon\nu \frac{57\pi}{4}$

ζ) $\sigma\phi \frac{61\pi}{3}$

η) $\eta\mu \frac{23\pi}{2}$

3.5 Αν $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ να αποδείξετε ότι $\eta\mu^4 x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \epsilon\phi^3 x - \sigma\phi^5 x > 0$.

3.6 Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή των παραστάσεων:

i) $A = 3\eta\mu\omega - 8$

ii) $B = 7 - 5\sigma\upsilon\nu^2\phi$

iii) $C = 4\sigma\upsilon\nu\alpha - 9\eta\mu\beta$

3.7 Αν $0 < a < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\eta\mu a + \sigma\upsilon\nu a > 1$.

3.8 Αν $0 < a < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\eta\mu a > \eta\mu^2 a > \eta\mu^3 a$.

3.9 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός a ώστε να ισχύει $\eta\mu^2 a + 2 < 3\eta\mu a$.

3.10 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{1 + \eta\mu x}{3 + 2\sigma\upsilon\nu x}$

ii) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - 8\eta\mu x}}$

iii) $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}}$

iv) $F(x) = \sqrt{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}$

3.11 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\sigma\upsilon\nu x = \frac{22}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}$.

3.12 Να βρείτε τις τιμές του ακέραιου k αν υπάρχει γωνία ω με $k(1 + \epsilon\phi^2 \omega) + 1 = 2\sqrt{2}\epsilon\phi \omega$.

3.13 Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x| < 1$.

3.14 Αν οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι ομόσημοι και $\theta \in [0, 2\pi)$ με $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{(a+b)^2}{4ab}$, να βρείτε τη γωνία θ .

3.15 Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα: $\sqrt{2}\eta\mu \frac{\pi x}{2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$.

3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές ταυτότητες

3.16 Αν $\sin x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

3.17 Αν $\cos x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

3.18 Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες έχουμε:

α) $\sin x = -\frac{21}{29}$ και $\cos x = \frac{20}{29}$ **β)** $\sin x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ και $\cos x = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$ με $|m| + |n| > 0$

3.19 Να αποδείξετε ότι υπάρχει γωνία ω , ώστε οι αριθμοί $\sin \omega$ και $\cos \omega$ να είναι οι ρίζες της εξίσωσης $25x^2 + 5x = 12$. Μετά να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\sin \omega + \cos \omega}{2 \sin \omega - \cos \omega}$.

3.20 Οι αριθμοί $\sin a$ και $\cos a$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $25x^2 + 5\lambda x + \lambda + 5 = 0$. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ .

Σε ποιο τεταρτημόριο καταλήγει το πέρας της γωνίας a ;

3.21 Να αποδείξετε ότι:

i) $\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

ii) $\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

3.22 Να αποδείξετε ότι $(\sin a + \cos a + 1)(\sin a + \cos a - 1) = 2 \sin a \cos a$.

3.23 Αν $0 < a < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι η παράσταση $P = (\sin a - 1)(\cos a - 1)$ είναι μη θετική.

3.24 Να αποδείξετε ότι $(2 \sin a + 3 \cos a)^2 + (3 \sin a - 2 \cos a)^2 = 13$.

3.25 Να αποδείξετε ότι $\sin^2 a \cdot \cos a + \sin^2 a \cdot \sin a + 2 \sin a \cdot \cos a = \cos a + \sin a$.

3.26 Να αποδείξετε ότι $\sin^2 a \cdot \cos a - \sin^2 a \cdot \sin a = \cos a - \sin a$.

3.27 Να αποδείξετε ότι $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \cos^2 x$.

3.28 Να αποδείξετε ότι $\frac{\cos^3 x}{1 + \cos^2 x} + \frac{\sin^3 x}{1 + \sin^2 x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin x \cos x}$.

3.29 Να αποδείξετε ότι $\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta}$.

3.30 Να αποδείξετε ότι $\frac{\sin x + \sin x - 1}{\sin x - \sin x + 1} = \frac{\sin x - \sin x + 1}{\sin x + \sin x + 1}$.

3.31 Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\cos^2 \alpha = 1 + 2 \cos^2 \beta$ τότε $\sin^2 \beta = 2 \sin^2 \alpha$

ii) Αν $\cos^2 \alpha = 1 + 2 \cos^2 \beta$ τότε $\sin^2 \beta = 2 \sin^2 \alpha$

3.32 Να αποδείξετε ότι $\left(\sin a + \frac{1}{\sin a}\right)^2 + \left(\cos a + \frac{1}{\cos a}\right)^2 = \cos^2 a + \sin^2 a + 7$.

3.33 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \sin x + \beta \cos x = \beta$ τότε ισχύει ότι $|\alpha \sin x - \beta \cos x| = \alpha$.

3.34 Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι $\frac{1 + \cos^\nu x}{1 + \sin^\nu x} = \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}\right)^\nu$.

3.35 i) Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\cos x + \sin x \geq 2$.

ii) Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ να αποδείξετε ότι $\cos x + \sin x \leq -2$.

3.36 Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2 \alpha + \eta\mu^2 \beta + 2 \sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta \leq 2$.

3.37 Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\eta\mu a + \sigma\upsilon\nu a}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$.

3.38 Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{1}{\eta\mu x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \geq 4(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2$ με $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3.39 Να αποδείξετε ότι: $\left(1 + \frac{1}{\eta\mu^2 x}\right) \left(1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) \geq 9$ με $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3.40 Να αποδείξετε ότι: $|\epsilon\phi \alpha \epsilon\phi \beta| < 1 \iff |\eta\mu \alpha| < |\sigma\upsilon\nu \beta|$.

3.41 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $|\alpha \eta\mu x - \beta \sigma\upsilon\nu x| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

3.42 Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι: **α)** $\sqrt{2 \epsilon\phi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = 1 + \epsilon\phi x$ **β)** $\sqrt{2 \sigma\phi x + \frac{1}{\eta\mu^2 x}} = 1 + \sigma\phi x$.

3.43 Αν $2 \epsilon\phi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + 4$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογιστεί η παράσταση $A = 3 \eta\mu x + 2 \epsilon\phi x - 12 \sigma\upsilon\nu x$.

3.44 Α. i) Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει γωνία $\hat{\omega}$ τέτοια ώστε $\eta\mu \omega = \alpha$ και $\sigma\upsilon\nu \omega = \beta$.

ii) Αν $\alpha\beta = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει γωνία $\hat{\omega}$ τέτοια ώστε $\epsilon\phi \omega = \alpha$ και $\sigma\phi \omega = \beta$.

Β. Για ποιές τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ υπάρχει γωνία $\hat{\omega}$, ώστε να ισχύει:

α) $\eta\mu \omega = \frac{\kappa - 3}{\kappa - 1}$ και $\sigma\upsilon\nu \omega = \frac{\kappa - 2}{\kappa - 1}$ **β)** $\epsilon\phi \omega = \frac{\kappa}{2\kappa + 3}$ και $\sigma\phi \omega = \frac{5\kappa}{3 - 2\kappa}$

3.45 Δίνεται η εξίσωση $(2 + \sqrt{5})x^2 + (2 - \sqrt{5})x - 4(5 - 2\sqrt{5}) = 0$.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις x_1, x_2 .

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει τόξο φ rad, ώστε $\eta\mu \varphi = x_1$ και $\sigma\upsilon\nu \varphi = x_2$.

Σε ποιο τεταρτημόριο έχει το πέρας του το τόξο φ ;

iii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $|\eta\mu \varphi - \sigma\upsilon\nu \varphi|$.

3.46 Αν $\frac{\eta\mu^4 \alpha}{\eta\mu^2 \beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu^4 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \beta} = 1$ να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu^8 \alpha}{\eta\mu^6 \beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu^8 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^6 \beta} = 1$.

3.47 Να αποδείξετε ότι: **α)** $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x \geq \frac{1}{2}$ **β)** $\eta\mu^8 x + \sigma\upsilon\nu^8 x \geq \frac{1}{8}$

3.48 Να αποδείξετε ότι: $\left(\eta\mu^2 x + \frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)^2 + \left(\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)^2 > \frac{25}{2}$ με $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3.3 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

3.49 Να υπολογίσετε τους επόμενους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu 1290^\circ$

β) $\sigma\upsilon\nu 2670^\circ$

γ) $\epsilon\phi 1935^\circ$

δ) $\sigma\phi 1320^\circ$

ε) $\epsilon\phi \frac{14\pi}{3}$

στ) $\sigma\upsilon\nu \frac{55\pi}{4}$

ζ) $\sigma\phi \frac{67\pi}{6}$

η) $\eta\mu \frac{82\pi}{3}$

3.50 Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 600^\circ \cdot \epsilon\phi 1200^\circ + \sigma\upsilon\nu 660^\circ \cdot \sigma\phi 2295^\circ = 1$.

3.51 Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{\eta\mu(180^\circ + a) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - a) \cdot \eta\mu(90^\circ + a)}{\sigma\upsilon\nu(270^\circ - a) \cdot \eta\mu(90^\circ - a) \cdot \sigma\upsilon\nu(-a)}$.

3.52 Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{\eta\mu(\theta - \pi) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{13\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{15\pi}{2} - \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu(9\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{23\pi}{2} + \theta\right)}$.

3.53 Αν $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\eta\mu(\pi - x) \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 2 + 2 \sigma\upsilon\nu(\pi + x)$.

3.54 Να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon\phi 1^\circ \cdot \epsilon\phi 2^\circ \cdot \epsilon\phi 3^\circ \cdot \dots \cdot \epsilon\phi 87^\circ \cdot \epsilon\phi 88^\circ \cdot \epsilon\phi 89^\circ = 1$.

β) $\sigma\upsilon\nu 1^\circ + \sigma\upsilon\nu 2^\circ + \sigma\upsilon\nu 3^\circ + \dots + \sigma\upsilon\nu 177^\circ + \sigma\upsilon\nu 178^\circ + \sigma\upsilon\nu 179^\circ = 0$.

γ) $\eta\mu 1^\circ + \eta\mu 2^\circ + \eta\mu 3^\circ + \dots + \eta\mu 357^\circ + \eta\mu 358^\circ + \eta\mu 359^\circ = 0$.

3.4 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

3.55 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 \sin \frac{x}{4}$.

- i) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

3.56 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

- i) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , όταν $0 \leq x \leq 2\pi$.
- ii) Από το σχέδιο του ερωτήματος (i) να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

3.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{4} + 4x \right)$.

- i) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

3.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \eta\mu(\pi + x)$.

- i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της.
- ii) Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f .
- iii) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

3.59 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu \frac{x}{3} \left(2 - \eta\mu \frac{x}{3} \right) - \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3} \right) - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{3} - \eta\mu \left(\pi + \frac{x}{3} \right)$.

- α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x) + \kappa$.
- β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου της.

3.60 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 2x) - \eta\mu \left[2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right]$.

- α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$.
- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

3.61 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 5 \eta\mu \left[\left(\frac{\kappa + \lambda}{2} \right) x \right] + \lambda - 2$ και $g(x) = 2 - (\kappa + 3) \sigma\upsilon\nu x$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε τα κ, λ αν οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και η περίοδος της g είναι διπλάσια της περιόδου της f .

3.62 α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ όταν $x \in [0, 2\pi]$.

- β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|f(x) - g(x)|$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.
- γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η προηγούμενη παράσταση γίνεται μέγιστη.

3.63 i) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = x^2 + 1$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

- ii) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = x^2 + 1$.

3.64 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right) - 2 \eta\mu(\pi + 4x)$, με $a > 0$. Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3.

- i) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$.
- ii) Να βρείτε τον a .
- iii) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, όταν $0 \leq x \leq \pi$.

3.65 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (3 - \alpha) \cdot \eta\mu(\beta x)$ με $\alpha > 1$ και $\beta > 0$. Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 2 και περίοδο π .

- i) Να βρείτε τα α, β .
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε διάστημα μιας περιόδου.

3.66 Οι ετήσιες πωλήσεις ενός προϊόντος, σε χιλιάδες κομμάτια, δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο $f(t) = 23 + 5 \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi t}{4} \right)$ όπου t ο χρόνος σε έτη και $0 \leq t \leq 8$.

- i) Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της f καθώς και την περίοδό της.

- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
 iii) Σε ποιο έτος θα έχουμε τον μικρότερο αριθμό πωλήσεων;
 iv) Σε ποιο έτος οι πωλήσεις θα φθάσουν τα 25500 κομμάτια;

3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$3.67 \text{ α)} (\eta\mu x + 1)^2 + (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 = 3 \quad \beta) \frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = 4$$

$$3.68 \text{ α)} \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2 + \sigma\upsilon\nu x - 2 \eta\mu 2x \quad \beta) \sigma\phi x - \sigma\upsilon\nu x = 1 - \sigma\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

$$3.69 \text{ α)} \eta\mu 3x + 1 = 0 \quad \beta) 2 \sigma\upsilon\nu \left(2x + \frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0$$

$$3.70 \text{ α)} 6 \eta\mu^2 x + 5 \sigma\upsilon\nu x = 2 \quad \beta) \eta\mu^2 x - (\sqrt{3} + 1) \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$$

$$\gamma) (\sqrt{3} + 3) \eta\mu^2 x = \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 3) \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

$$3.71 \text{ α)} 9 \sigma\phi^4 x - 1 = 0 \quad \beta) \eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0 \quad \gamma) \epsilon\phi^2 x = 4 \sigma\upsilon\nu^2 x - 1$$

$$3.72 \text{ α)} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\eta\mu x} \quad \beta) \epsilon\phi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu x$$

$$3.73 \text{ α)} 3 \epsilon\phi 2x + \sqrt{3} = 0, \text{ στο διάστημα } [-\pi, \pi] \quad \beta) \eta\mu \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \text{ στο διάστημα } [0, 2\pi].$$

$$\gamma) \sqrt{3} \epsilon\phi \frac{2x}{3} + 1 = 0, \text{ στο διάστημα } (0, 3\pi) \quad \delta) \frac{1}{\eta\mu^2 x} = 2 \sigma\phi x, \text{ στο διάστημα } [-\pi, \pi]$$

$$\epsilon) 2 \sigma\upsilon\nu^3 x - \eta\mu^2 x + 2 \sigma\upsilon\nu x + 2 = 0, \text{ στο διάστημα } (-2\pi, \pi]$$

3.74 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta\mu \left(\frac{2x}{3}\right) + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A \left(\frac{3\pi}{2}, 3\right)$ και η μέγιστη τιμή f είναι 5. Να βρείτε:

i) Τα α, β

ii) Την περίοδο της συνάρτησης.

iii) Τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 4$.

3.75 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu(2x + \pi) + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \eta\mu^2(-x) + 2$ και $g(x) = \eta\mu \left[2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] - \sigma\upsilon\nu^2(\pi - x)$, με $x \in [0, 2\pi]$. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

3.76 Αν $\eta\mu \alpha = \frac{4}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\sigma\upsilon\nu \beta = -\frac{3}{5}$ με $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε:

i) το $\eta\mu(\alpha - \beta)$ ii) το $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$

3.77 Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \sigma\upsilon\nu(45^\circ - \alpha) \sigma\upsilon\nu(45^\circ - \beta) - \eta\mu(45^\circ - \alpha) \eta\mu(45^\circ - \beta) = \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$\text{ii)} \eta\mu(45^\circ + \alpha) \sigma\upsilon\nu(45^\circ - \beta) + \sigma\upsilon\nu(45^\circ + \alpha) \eta\mu(45^\circ - \beta) = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$$

3.78 Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \sigma\upsilon\nu \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sigma\upsilon\nu \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ii)} \eta\mu(a + 18^\circ) \sigma\upsilon\nu(12^\circ - a) - \sigma\upsilon\nu(a + 78^\circ) \eta\mu(a - 72^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$3.79 \text{ Να αποδείξετε ότι: } \eta\mu \left(\frac{\pi}{4} + \phi\right) + \eta\mu \left(\frac{\pi}{4} - \phi\right) = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu \phi.$$

$$3.80 \text{ Να αποδείξετε ότι: } (\sigma\upsilon\nu a - \eta\mu a)(\sigma\upsilon\nu 2a - \eta\mu 2a) = \sigma\upsilon\nu a - \eta\mu 3a.$$

3.81 Να αποδείξετε ότι το κλάσμα: $A = \frac{\eta\mu(\alpha + x) - \eta\mu(\alpha - x)}{\sigma\upsilon\nu(\beta - x) - \sigma\upsilon\nu(\beta + x)}$ είναι ανεξάρτητο του x .

3.82 α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu x - \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu x = 2 \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu x - \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}$.

3.83 α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu \theta + \sigma\upsilon\nu \theta = \sqrt{2} \eta\mu(\theta + 45^\circ)$.

β) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η υποτείνουσα του $B\Gamma = 1$ και η περίμετρός του ισούται με $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$. Να βρείτε τις οξείες γωνίες του τριγώνου.

3.84 Να αποδείξετε ότι: **i)** $1 + \epsilon\varphi a \epsilon\varphi 2a = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2a}$ **ii)** $1 - \epsilon\varphi 2a \sigma\varphi a = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2a}$.

3.85 Να αποδείξετε ότι: **i)** $\epsilon\varphi \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}$ **ii)** $\epsilon\varphi(45^\circ - a) = \frac{\sigma\upsilon\nu a - \eta\mu a}{\sigma\upsilon\nu a + \eta\mu a}$.

3.86 Να αποδείξετε ότι: $\frac{\epsilon\varphi^2 2a - \epsilon\varphi^2 a}{1 - \epsilon\varphi^2 2a \epsilon\varphi^2 a} = \epsilon\varphi 3a \epsilon\varphi a$.

3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $2a$

3.87 Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες: **α)** $2 \eta\mu \frac{\pi}{8} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

β) $(\eta\mu \frac{\pi}{8} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8})^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

γ) $(\eta\mu 15^\circ - \sigma\upsilon\nu 15^\circ)^2 = \frac{1}{2}$

δ) $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{12} - \eta\mu^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3.88 Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 80^\circ = \eta\mu^2 50^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 50^\circ$.

3.89 Να αποδείξετε τις ισότητες:

i) $\sigma\upsilon\nu^2(45^\circ - a) - \eta\mu^2(45^\circ - a) = \eta\mu 2a$

ii) $1 - 2 \eta\mu^2(45^\circ - \frac{a}{2}) = \eta\mu a$

3.90 Αν $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu a = -\frac{1}{4}$, να υπολογίσετε:

i) το $\sigma\upsilon\nu \frac{a}{2}$ **ii)** τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{a}{4}$.

3.91 Να αποδείξετε ότι: **i)** $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu 2x}{2 \eta\mu x}$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

3.92 Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Pi = \frac{\eta\mu 3a}{\eta\mu a} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3a}{\sigma\upsilon\nu a}$ είναι ανεξάρτητη του a .

3.93 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^2$.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου της.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία που έχει εξίσωση $y - 1 = 0$.

3.94 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}{2} - \eta\mu x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιοδική και να βρείτε την περίοδό της.

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο βρίσκονται οι τιμές της συνάρτησης.

3.95 Αν $\eta\mu a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2 .

3.96 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\frac{\pi}{8}$ και $\frac{\pi}{16}$.

3.97 Για τη γωνία a ισχύει ότι: $5 \sigma\upsilon\nu 2a - 14 \sigma\upsilon\nu a - 7 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu a = -\frac{3}{5}$

β) Αν επιπλέον ισχύει $\pi \leq a \leq \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $2a$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 Πολυώνυμο

4.1 Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (1 - \alpha^2)x^3 + (\beta^2 - \alpha)x^2 + (\alpha - 4\beta)x + 2$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η τιμή του $P(x)$ στο -1 είναι -4 . Να βρείτε:

- i) Τους α, β
- ii) Το βαθμό του πολωνύμου $P(x)$.
- iii) Το πολυώνυμο $Q(x) = P(-x) - P(x - 1)$.

4.2 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$.

- i) Να γράψετε το $P(x)$ στη μορφή $(x + 1)^3 + \alpha(x + 1)^2 + \beta(x + 1) + \gamma$
- ii) Να διασπάσετε το κλάσμα $K = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 1}{(x + 1)^4}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

4.3 Δίνεται το κλάσμα $K = \frac{3x^2 - 4x + 5}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

- i) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται το K .
- ii) Να διασπάσετε το κλάσμα ως εξής: $K = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + \Gamma}{x^2 + 1}$.

4.4 i) Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, τρίτου βαθμού τέτοιο ώστε $P(0) = 0$ και $P(x) - P(x - 1) = x^2$.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

4.5 α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των συντελεστών ενός πολωνύμου $P(x)$ ισούται με τον αριθμό $P(1)$.

β) Έστω $P(x) = (x - 2)^{2019} - x^{2019} + 6x - 2$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των συντελεστών του.

4.6 Να βρείτε πολυώνυμο $f(x)$ τρίτου βαθμού αν δίνεται ότι $f(-1) = 2$, $f(2) = 8$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή.

4.2 Διαίρεση πολωνύμων

4.7 Να πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 - x + 1$, δίνει πηλίκο $2x - 3$ και υπόλοιπο $3x - 4$.

4.8 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5a - 1)x^2 + 8x - 3a - 6$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

- α) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ δια του $x^2 - 1$ και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.
- β) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.
- γ) Για $a = 3$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

- 4.9** Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (a+1)x^3 + (a-3)x^2 - 3x - 2a - 2$ έχει παράγοντα το $\phi(x) = x^2 - x + 2$.
 Να βρείτε τις τιμές:
i) του πραγματικού αριθμού a
ii) του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- 4.10** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \kappa x^3 - (\kappa + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$.
α) Αν $P(-\frac{1}{2}) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$.
β) Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$, για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$, με το πολυώνυμο $2x + 1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.
γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$ για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$.
- 4.11** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - 39x + 2\alpha$ να έχει παράγοντες τους $x - 2$ και $x - 3$. Μετά να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.
- 4.12 i)** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x + \beta$ να διαιρείται από το $(x - 1)^2$.
ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P(x)$ με τον άξονα $x'x$.
- 4.13** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\lambda - 4)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 2\kappa$, το οποίο έχει παράγοντα το $\phi(x) = (x + 2)^2$.
α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .
β) Να εκτελέσετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 4x + 5$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.
γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) + 37 > 7x$.
- 4.14** Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 - (2\beta + \alpha)x^2 + 5\alpha x + 10$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Το πολυώνυμο $x^2 + x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
i) Να βρείτε τα α, β .
ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- 4.15** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\beta - \alpha)x^3 - (\alpha + \beta)x^2 - (2\beta + \alpha)x - \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
i) Να προσδιορίσετε τα α, β ώστε το $P(x)$ να διαιρείται με τη μεγαλύτερη δύναμη του $x + 1$.
 Για τις τιμές των α, β που θα βρείτε:
ii) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.
iii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- 4.16** Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -1 , ενώ διαιρούμενο με το $x + 2$ αφήνει υπόλοιπο -10 . Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + x - 2)$.
- 4.17** Οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = 3x^2 - 9x - 7$ είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x) = 6x^3 - 57x^2 + 103x + 91$. Να βρείτε την τρίτη ρίζα του $Q(x)$.
- 4.18** Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x) = x^{101} - 3x^{100} + (x + 1)^2 \quad \text{με το} \quad x^2 - 1.$$
- 4.19** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^4 - (\alpha + 1)x^3 - 17x^2 + (5\beta + 2)x - 9$$
 να έχει παράγοντα τον $x^2 - 9$.
- 4.20** Για ένα πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει η σχέση $P(3x + 2) = 3P(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ο σταθερός όρος του πολυωνύμου είναι 1, να αποδείξετε ότι $P(26) = 14$.

4.3 Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

- 4.21** Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}$.