ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Όταν ήμουν 11 χρονών άρχισα να διαβάζω τα Στοιχεία του Ευκλείδη… Αυτό ήταν ένα από τα μεγάλα γεγονότα στη ζωή μου, τόσο εκτυφλωτικό όσο και ο πρώτος έρωτας. Δεν είχα ποτέ φανταστεί ότι υπήρχε κάτι τόσο γοητευτικό στον κόσμο.

– BERTRAND RUSSEL

1.1. Να βρεθεί γωνία $\hat{\varphi}$, όταν το άθροισμα της συμπληρωματικής της και της παραπληρωματικής της γωνίας είναι ίσο με το τετραπλάσιο της γωνίας $\hat{\varphi}$.

Λύση :

Η συμπληρωματική της γωνίας $\hat{\varphi}$ είναι …… – $\hat{\varphi}$, ενώ η παραπληρωματική της είναι …… – $\hat{\varphi}$. Τότε: $(90^0 - \hat{\varphi}) + (180^0 - \hat{\varphi}) = \ldots\hat{\varphi} \Leftrightarrow$

$$90^0 - \ldots\ldots + \ldots\ldots - \hat{\varphi} = \ldots\hat{\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\ldots\ldots^0 - \ldots\hat{\varphi} = 4\hat{\varphi} \Leftrightarrow$$

$$270^0 = \ldots\hat{\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots} \Leftrightarrow$$

$$\hat{\varphi} = \ldots\ldots .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.2. Αν μία γωνία είναι είναι τα $\frac{3}{8}$ της ορθής, να βρεθεί η συμπληρωματική της και η παραπληρωματική της σε μέρη ορθής και σε μοίρες.

1.3. Αν οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών είναι κάθετοι, τότε δείξτε ότι οι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

1.4. Αν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές και άνισες, να δείξετε ότι η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

1.5. Αν δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές και άνισες, να δείξετε ότι η μία είναι μικρότερη και η άλλη είναι μεγαλύτερη από 45^0.

1.6. Από ένα σημείο Ο φέρνουμε τις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ έτσι ώστε $ΟΒ \perp ΟΓ$ και οι γωνίες $Α\hat{Ο}Β$, $Γ\hat{Ο}Δ$ να είναι συμπληρωματικές. Να δείξετε ότι οι ημιευθείες ΟΑ, ΟΔ είναι αντικείμενες.

1.7. Κατασκευάζουμε τέσσερις διαδοχικές γωνίες $Α\hat{Ο}Β$, $Β\hat{Ο}Γ$, $Γ\hat{Ο}Δ$, $Δ\hat{Ο}Α$. Αν $Α\hat{Ο}Β = Γ\hat{Ο}Δ = 90^0$ τότε οι διχοτόμοι των $Β\hat{Ο}Γ$ και $Δ\hat{Ο}Α$ είναι αντικείμενες ημιευθείες.

1.8. Να βρεθεί γωνία της οποίας το άθροισμα της συμπληρωματικής και της παραπληρωματικής της είναι ίσο με το επταπλάσιο της γωνίας.

1.9. Να βρεθεί οξεία γωνία $\hat{\varphi}$ τέτοια ώστε η διαφορά της από την παραπληρωματική της να ισούται με το διπλάσιο της $\hat{\varphi}$.

1.10. Θεωρούμε τέσσερις διαδοχικές ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ τέτοιες ώστε $(Α\hat{Ο}Β) = 150^0$, $(Γ\hat{Ο}Δ) = \frac{1}{2}$ ορθής, $(Δ\hat{Ο}Α) = \frac{7}{6}$ ορθής. Δείξτε ότι η διχοτόμος της $Β\hat{Ο}Γ$ είναι αντικείμενη της ΟΑ.

1.11. Δίνονται τέσσερις διαδοχικές γωνίες $Α\hat{Ο}Β$, $Β\hat{Ο}Γ$, $Γ\hat{Ο}Δ$ και $Δ\hat{Ο}Α$, που τα μέτρα τους είναι ανάλογα των αριθμών 2, 3, 5 και 8.

i) Να βρείτε τα μέτρα τους.

ii) Τα Να δείξετε ότι η διχοτόμος της $Δ\hat{Ο}Α$ είναι αντικείμενη της ΟΓ.

1.12. Από ένα σημείο Ο μιας ευθείας ΑΒ φέρνουμε προς το ίδιο μέρος αυτής τις ημιευθείες ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ έτσι ώστε οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}E$ και $E\hat{O}B$ να είναι διαδοχικές και ανάλογες των αριθμών 2, 3, 6 και 7 αντίστοιχα. Δείξτε ότι οι ημιευθείες ΟΓ και ΟΕ είναι κάθετες.

1.13. Δίνονται οι διαδοχικές κυρτές γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ με $(A\hat{O}B)=40^0$. Αν ΟΔ, ΟΕ είναι οι διχοτόμοι των $A\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $\Delta\hat{O}E$.

[Απ. 20^0]

1.14. Από σημείο Ο μιας ευθείας ΑΒ φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της ΑΒ ημιευθείες ΟΓ και ΟΔ, ώστε οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ και $\Delta\hat{O}B$ να είναι διαδοχικές. Αν ΟΕ, ΟΗ είναι οι διχοτόμοι των $A\hat{O}\Gamma$, $\Delta\hat{O}B$ και $E\hat{O}H=100^0$, να βρεθεί η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$.

[Απ. 20^0]

1.15. Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες γωνίες $A\hat{K}B$, $B\hat{K}\Gamma$, $\Gamma\hat{K}\Delta$ και φέρνουμε τις διχοτόμους Kx και Ky των $A\hat{K}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι $Kx \perp Ky$ αν και μόνο αν οι γωνίες $A\hat{K}\Delta$ και $B\hat{K}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

1.16. Από σημείο Ο ευθείας ΑΒ φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της ΑΒ ημιευθείες ΟΓ, ΟΔ ώστε οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ και $\Delta\hat{O}B$ να είναι διαδοχικές. Αν Ox, Oy είναι οι διχοτόμοι των $A\hat{O}\Gamma$, $\Delta\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta=40^0$, να βρεθεί η $x\hat{O}y$.

[Απ. 110^0]

1.17. Από τις διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ και $\Delta\hat{O}A$ η πρώτη είναι ορθή, η δεύτερη είναι τα $\frac{2}{3}$ της ορθής, ενώ η τρίτη είναι τα $\frac{5}{6}$ της ορθής. Αν ΟΚ, ΟΛ, ΟΜ είναι οι διχοτόμοι των $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $\Lambda\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα τότε:

i) Δείξτε ότι οι ημιευθείες ΟΚ, ΟΔ είναι αντικείμενες.
ii) Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $A\hat{O}\Delta$.
iii) Δείξτε ότι οι ημιευθείες ΟΜ και ΟΔ είναι κάθετες.

1.18. Θεωρούμε δύο διαδοχικές οξείες γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$, οι οποίες διαφέρουν κατά 36^0. Έστω ΟΚ, ΟΛ και ΟΜ οι διχοτόμοι των $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $K\hat{O}\Lambda$ αντίστοιχα. Βρείτε το μέτρο της γωνίας $B\hat{O}M$.

[Απ. 9^0]

1.19. Θεωρούμε δύο διαδοχικές άνισες οξείες γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$. Έστω ΟΚ, ΟΛ, ΟΜ, ΟΝ οι διχοτόμοι των $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $K\hat{O}\Lambda$ και $A\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η ΟΜ είναι διχοτόμος της $B\hat{O}N$.

1.20. Θεωρούμε τις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ και ΟΚ, ΟΛ, ΟΜ, ΟΝ τις διχοτόμους των $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ και $\Delta\hat{O}A$ αντίστοιχα. Αν οι ημιευθείες ΟΚ, ΟΜ όσο και οι ημιευθείες ΟΛ, ΟΝ είναι αντικείμενες, δείξτε το ίδιο και για τις ΟΑ, ΟΓ καθώς και τις ΟΒ, ΟΔ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Το ζήτημα που τίθεται σε κάθε επιστημονική εργασία είναι τούτο: μαγεία ή γεωμετρία.

– RENE THOM

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

2.1. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή *Λάθος* κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- **I.** Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ και $\hat{A}=\hat{Z}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- **II.** Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.
- **III.** Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και μία πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά του άλλου τριγώνου.
- **IV.** Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους, τότε είναι ί-σα.
- **V.** Αν δύο ισόπλευρα τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους, τότε είναι ίσα.
- **VI.** Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες και μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου, είναι ίσα.
- **VII.** Δεν υπάρχει αμβλυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο.
- **VIII.** Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
- **IX.** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν ίσες τις υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.2. Στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα ΑΔ=$\frac{1}{3}$ΑΒ και ΑΕ=$\frac{1}{3}$ΑΓ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.

2.3. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη βάση του ΒΓ προς τις δύο κορυφές και παίρνουμε σημεία Ε, Ζ τέτοια ώστε ΒΕ=ΓΖ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

2.4. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα ίσα τμήματα ΒΔ, ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.

2.5. Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο Ο. Πάνω στην ε_1 παίρνουμε σημεία Α, Β έτσι, ώστε να είναι ΟΑ=ΟΒ και πάνω στην ε_2 παίρνουμε σημεία Γ, Δ ώστε ΟΓ=ΟΔ. Να δείξετε ότι ΑΓ=ΒΔ και ΑΔ=ΒΓ.

2.6. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:
i) ΑΒ=ΕΓ
ii) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΓ είναι ίσα.

2.7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$ ώστε οι γωνίες $x\hat{A}B$ και $y\hat{A}\Gamma$ να είναι εφεξής με την $\hat{A}$. Στις Ax, Ay παίρνουμε ΑΒ'=ΑΒ και ΑΓ'=ΑΓ α-ντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΒΓ'=ΓΒ'.

2.8. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΒΑ, ΓΑ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμήματα ΑΔ=ΑΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.

2.9. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ ώστε ΑΔ=ΒΕ=ΓΖ. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

2.10. Στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα ώ-στε ΑΔ=$\frac{1}{3}$ΑΒ και ΑΕ=$\frac{1}{3}$ΑΓ. Τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Κ.
Να αποδείξετε ότι:
i) ΒΕ=ΓΔ **ii)** ΚΔ=ΚΕ

2.11. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Στις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα ώστε ΑΔ=ΑΕ. Αν Μ είναι το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι:
i) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.
ii) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

2.12. Σε οξεία γωνία $x\hat{O}y$ φέρνουμε $Oz \perp Oy$ προς το μέρος της Ox και $O\omega \perp Ox$ προς το μέρος της Oy. Στις ημιευθείες Oy, Ox παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα ΟΑ=ΟΒ ενώ στις Oz, $O\omega$ τα τμήματα ΟΓ=ΟΔ. Δείξτε ότι ΒΓ=ΑΔ.

2.13. Δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται σε σημείο Ο. Στην $ε_1$ παίρνουμε τα τμήματα ΟΑ=ΟΒ ενώ στην $ε_2$ τα τμήματα ΟΓ=ΟΕ και ΟΔ=ΟΖ. Να δείξετε ότι

$Z\hat{A}E = \Gamma\hat{B}\Delta$.

2.14. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ ενός ι-σοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, προς το μέρος του Α παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Δ ώστε ΒΕ=ΓΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να δείξετε ότι

i) ΔΜ=ΕΝ.

ii) Τα τρίγωνα ΔΜΝ και ΕΜΝ είναι ίσα.

2.15. Στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Ε ώστε ΒΔ=ΓΕ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να δείξετε ότι:

i) ΔΝ=ΜΕ.

ii) Τα τρίγωνα ΔΜΕ και ΔΝΕ είναι ίσα.

2.16. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Στην πλευρά της Ox παίρνουμε τα σημεία Α, Β και στην πλευρά της Oy τα σημεία Γ, Δ ώστε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ της διχοτόμου Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$. Να δείξετε ότι:

α) ΑΜ = ΜΓ.

β) $A\hat{M}B = \Gamma\hat{M}\Delta$.

γ) Η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{M}\Gamma$.

2.17. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, τη διάμεσό του ΑΔ και τυχαίο σημείο Κ της ΑΔ. Το τμήμα ΒΚ προεκτεινόμενο τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ, ενώ το τμήμα ΓΚ προεκτεινόμενο τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΚ = ΚΓ.

β) ΚΔ = ΚΕ.

γ) Η ΑΚ είναι μεσοκάθετος της ΔΕ.

2.18. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Στην πλευρά της Ox παίρνουμε τα σημεία Α, Β και στην πλευρά της Oy τα σημεία Γ, Δ ώστε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ. Αν οι ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο σημείο Κ, να δείξετε ότι:

α) ΑΔ = ΒΓ.

β) ΚΒ = ΚΔ.

γ) Η ΟΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

2.19. Στις πλευρές μιας γωνίας $x\hat{O}y$ παίρνουμε τα ίσα τμήματα ΟΑ και ΟΒ. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο της διχοτόμου $O\delta$ της γωνίας, να δείξετε ότι:

α) ΜΑ=ΜΒ.

β) Αν Α', Β' είναι τα σημεία στα οποία οι προεκτάσεις των ΒΜ και ΑΜ τέμνουν τις Oy, Ox αντίστοιχα, τότε ΑΑ'=ΒΒ'.

2.20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και ΑΔ είναι η διχοτόμος του. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΑΕ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.

β) $BE \perp A\Delta$

γ) Αν η προέκταση της ΕΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Κ, τότε τα τρίγωνα ΚΒΔ και ΔΕΓ είναι ίσα.

δ) Το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ισοσκελές.

ε) $K\Gamma \perp A\Delta$

2.21. Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν β=β', γ=γ' και $\mu_\alpha=\mu_{\alpha'}$, τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

2.22. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ>ΑΓ. Στην προέκταση της ΒΑ παίρνουμε τμήμα ΑΓ'=ΑΓ και στην προέκταση της ΓΑ τμήμα ΑΒ'=ΑΒ. Οι ευθείες Β'Γ' και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Δ. Δείξτε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΓΓ' είναι ισοσκελές.

β) Η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$ διέρχεται από το Α.

Ισότητα ορθογωνίων τριγώνων

2.23. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και ένα σημείο Δ της διχοτόμου της. Φέρνουμε την κάθετο στο Δ πάνω στην διχοτόμο, που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία Α και Β. Δείξτε ότι ΟΑ=ΟΒ και ΔΑ=ΔΒ.

2.24. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Να δείξετε ότι οι κορυφές Β και Γ ισαπέχουν από την ευθεία ΑΜ.

2.25. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και παίρνουμε τα μέσα Κ, Λ των ίσων πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Φέρνουμε κάθετο στην ΑΒ στο σημείο Κ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Μ και κάθετο στην ΑΓ στο σημείο Λ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ν. Δείξτε ότι ΚΜ=ΛΝ.

2.26. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και στη βάση του ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε έτσι ώστε ΒΔ=ΓΕ. Αν $BK \perp A\Delta$ και $\Gamma\Lambda \perp AE$, να δείξετε ότι ΑΚ=ΑΛ.

2.27. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και παίρνουμε το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Αν Δ, Ε είναι οι προβολές του Μ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε να δείξετε ότι:

α) ΜΔ=ΜΕ **β)** $A\hat{M}\Delta = A\hat{M}E$

2.28. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ και από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στην ΑΔ που την τέμνει στο σημείο Ε, ενώ την ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ζ. Να δείξετε ότι ΒΔ=ΔΖ.

2.29. Στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΡ=ΑΣ. Αν Κ είναι τυχαίο σημείο του ύψους του ΑΔ και οι ΡΚ, ΣΚ τέμνουν την ΒΓ στα σημεία Μ και Ν, να δείξετε ότι ΒΝ=ΓΜ.

2.30. Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Φέρνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν Η είναι το σημείο τομής των δύο υψών του, τότε δείξτε ότι:

α) ΑΔ = ΑΕ

β) Το ΑΗ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ.

2.31. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και τα σημεία Α, Β στις Ox, Oy ώστε ΟΑ=ΟΒ. Φέρνουμε κάθετη στην Ox στο Α που τέμνει την Oy στο Γ και κάθετη στην Oy στο Β που τέμνει την Ox στο Δ. Τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι το Μ βρίσκεται στη διχοτόμο της $x\hat{O}y$.

2.32. Δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Α'Β'Γ' (Α'Β'=Α'Γ') έχουν α=α' και $\upsilon_\alpha=\upsilon_{\alpha'}$. Δείξτε ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

2.33. Δείξτε ότι δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με $\hat{A}=\hat{A}'$, $\upsilon_\alpha=\upsilon_{\alpha'}$ και $\delta_\alpha=\delta_{\alpha'}$ είναι ίσα.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

3.1. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* ή Λάθος κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ι. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΔ είναι ύψος του. Τότε ΑΔ<ΑΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.2. Θεωρούμε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ τα οποία τέμνονται στο σημείο Σ. Να αποδείξετε ότι ΑΓ + ΒΔ < ΑΒ + ΓΔ.

3.3. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε ένα σημείο Δ στην πλευρά του ΒΓ. Από το Δ φέρνουμε καθέτους στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΕΖ < ΒΓ.

3.4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ οι διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ τέμνονται στο σημείο Ι.

α) Να συγκρίνετε τις γωνίες $Ι\hat{Β}Γ$ και $Ι\hat{Γ}Β$.

β) Να δείξετε ότι: ΙΓ > ΙΒ.

3.5. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των διαγώνιων ενός τετράπλευρου είναι μεγαλύτερο από την ημιπερίμετρο και μικρότερο από την περίμετρο αυτού.

3.6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η γωνία $\hat{Α}$ είναι αμβλεία. Στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ > ΑΒ και ΓΔ > ΑΓ

β) ΒΔ + ΔΕ + ΕΓ < ΑΒ + ΑΓ

3.7. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με β>γ. Στην ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΑΕ = ΑΒ και φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ της $\hat{Α}$. Παίρνουμε σημείο Κ της ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΚ = ΚΕ

β) ΚΓ – ΚΒ < β – γ

3.8. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} > \hat{Γ}$ και ΑΜ είναι η διάμεσός του. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ρ στην ΑΜ. Να δείξετε ότι:

α) ΑΓ>ΑΒ και $Α\hat{Μ}Γ > Α\hat{Μ}Β$

β) ΡΒ<ΡΓ

γ) $Β\hat{Ρ}Γ > \hat{Α}$

δ) ΒΡ + ΡΓ < ΑΒ + ΑΓ

3.9. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι:

i) $υ_α < \frac{β+γ}{2}$

ii) $υ_α > \frac{β+γ-α}{2}$

iii) $τ < υ_α + υ_β + υ_γ < 2τ$, όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

4.1. Από τις οκτώ γωνίες που σχηματίζουν δύο παράλληλες ευθείες, όταν τέμνονται από μία τρίτη ευθεία, η μία είναι ίση με τα $\frac{4}{5}$ της ορθής. Να υπολογιστεί το μέτρο κάθε μιας γωνίας σε μοίρες.

4.2. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και από τυχαίο σημείο Α της Ox φέρνουμε παράλληλη προς την Oy και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα ΑΒ=ΟΑ. Να δείξετε ότι η ΟΒ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

4.3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$. Στο σημείο Γ φέρνουμε κάθετη στην ΑΓ, η οποία δεν βρίσκεται στο ίδιο μέρος με την ΑΒ και παίρνουμε σ' αυτήν τμήμα ΓΔ=ΒΓ. Δείξτε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

4.4. Από τα άκρα Α, Β ενός τμήματος ΑΒ φέρνουμε παράλληλες ημιευθείες Ax, By προς το ίδιο ημιεπίπεδο. Παίρνουμε σημείο Ο μέσα στη ζώνη των παραλλήλων. Δείξτε ότι $A\hat{O}B = O\hat{A}x + O\hat{B}y$.

4.5. Από τα άκρα Α, Β ενός τμήματος ΑΒ φέρνουμε παράλληλες ημιευθείες Ax, By προς το ίδιο ημιεπίπεδο. Παίρνουμε σημείο Ο εκτός της ζώνης των παραλλήλων και στο ίδιο ημιεπίπεδο με τις Ax, By. Δείξτε ότι η γωνία $A\hat{O}B$ είναι ίση με τη διαφορά των γωνιών $O\hat{A}x$ και $O\hat{B}y$.

4.6. Σε οξεία γωνία $x\hat{O}y$, θεωρούμε σημείο Α της Ox. Φέρνουμε $AB \perp Oy$ και τη διχοτόμο της $B\hat{A}O$ που τέμνει την Οy στο Γ. Η κάθετος στο σημείο Γ επί της Oy τέμνει την Ox στο σημείο Δ. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.

4.7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ η διάμεσός του. Κατασκευάζουμε γωνία $A\hat{\Delta}E = \hat{B}$, όπου Ε σημείο της ΑΓ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Δείξτε ότι $A\hat{\Delta}Z = A\hat{E}Z$.

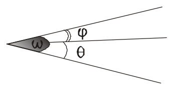
4.8. Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$, τη διχοτόμο της $O\delta$ και σημείο Α της Oy. Φέρνουμε την ημιευθεία $Az // O\delta$, η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $x\hat{O}y$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Ν της Az και φέρνουμε τις $NB \perp Ox$, $N\Gamma \perp Oy$. Να δειχθεί ότι η διαφορά ΝΒ–ΝΓ είναι σταθερή.
*(**Υπόδειξη:** Να φέρετε την απόσταση του Α από την ΝΒ.)*

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.

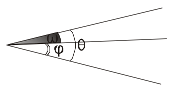
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o$ και $\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=90^o$
- Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^o$ και $\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=180^o$
- Αν θέλουμε να υπολογίσουμε μια γωνία τότε

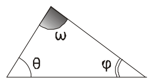
  τη γράφουμε σαν άθροισμα δύο άλλων γωνιών
  $\hat{\omega} = \hat{\theta} + \hat{\varphi}$



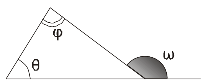
  τη γράφουμε σαν διαφορά δύο άλλων γωνιών
  $\hat{\omega} = \hat{\theta} - \hat{\varphi}$



  αν είναι γωνία ενός τριγώνου τότε
  $\hat{\omega} = 180^o - \hat{\theta} - \hat{\varphi}$



  αν είναι εξωτερική γωνία ενός τριγώνου τότε
  $\hat{\omega} = \hat{\theta} + \hat{\varphi}$



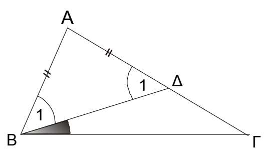
5.1. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ παίρνουμε πάνω στην ΑΓ τμήμα ΑΔ=ΑΒ.

α) Να δείξετε ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

β) Αν η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε, να δείξετε ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{1}{2}A\hat{B}E$.

Προσπαθούμε να εκφράσουμε τη γωνία ως συνάρτηση των γωνιών του βασικού σχήματος, εδώ του τριγώνου.

Λύση:



α) $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \ldots$. **(1).**

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ……………… γιατί ΑΒ= … .

Άρα $\hat{B}_1 = \ldots$.

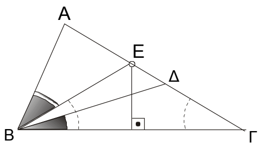
Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι ………………… του τριγώνου ΒΔΓ, επομένως $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{B}\Gamma + \ldots$.

Δηλαδή $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \ldots\ldots + \ldots$ **(2).**

Από τις **(1)** και **(2)** έχουμε

$$\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - (\ldots\ldots + \ldots) \Leftrightarrow$$
$$\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \ldots\ldots - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$$
$$2\ \ldots\ldots = \hat{B}-\hat{\Gamma} \Leftrightarrow$$
$$\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$$

β) Το σημείο Ε βρίσκεται στη ………………… του τμήματος …… , άρα ΒΕ = …… . Επομένως το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ……………… , με $\widehat{ΕΒΓ} = \widehat{…}$. Άρα $\widehat{ΑΒΕ} = \hat{Β} - \widehat{……} = \hat{Β} - \hat{Γ}$. Συνεπώς $\widehat{ΔΒΓ} = \dfrac{1}{2}\widehat{ΑΒΕ}$.

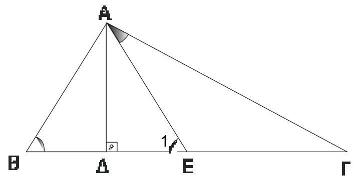


5.2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ και πάνω στη ΒΓ παίρνουμε τμήμα ΔΕ=ΒΔ. Δείξτε ότι $\widehat{ΕΑΓ} = \hat{Β} - \hat{Γ}$.

Λύση :

Επειδή η ΑΒ<ΑΓ τότε η γωνία $\hat{Β} > \hat{Γ}$ και έτσι έχει έννοια η διαφορά των δυο γωνιών.

Η γωνία $\hat{Ε}_1$ είναι ………………… του τριγώνου ΑΕΓ. Άρα $\hat{Ε}_1 = \widehat{ΕΑΓ} + …$ ⇔ $\widehat{ΕΑΓ} = … - …$ **(1)**.
Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ……………… γιατί το τμήμα ΑΔ είναι ύψος και ………………… . Άρα $\hat{Ε}_1 = …$ **(2)**.
Από **(1)** και **(2)** έχουμε ότι $\widehat{ΕΑΓ} = \hat{Β} - \hat{Γ}$.



5.3. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ δείξτε ότι:
α) Οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών εξωτερικών του γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των αντίστοιχων γωνιών του.
β) Οι απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των εξωτερικών του γωνιών, είναι παραπληρωματικές.

Λύση:

α) Στο τρίγωνο ΚΑΒ έχουμε

$$\hat{Κ} = 180^o - \hat{Α}_1 - … = 180^o - …… - \frac{\hat{Β}_{εξ}}{2}$$

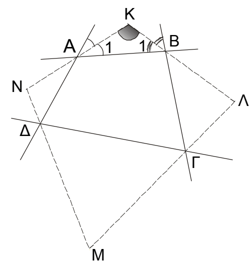
$$= 180^o - \frac{180^o - \hat{Α}}{2} - \frac{……-….}{2}$$

$$= \frac{360^o - …… + …. - …… + ….}{2} = \frac{\hat{Α}+\hat{Β}}{2}.$$

β) Στο ερώτημα (α) δείξαμε ότι $\hat{Κ} = \dfrac{\hat{Α}+\hat{Β}}{2}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $\hat{Μ} = \dfrac{\hat{…}+\hat{…}}{2}$.

Άρα $\hat{Κ} + \hat{Μ} = \dfrac{\hat{…}+\hat{…}}{2} + \dfrac{\hat{…}+\hat{…}}{2} = \dfrac{\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}+\hat{Δ}}{2} = 180^o$.

Ακόμα $\hat{Ν} + \hat{Λ} = 360^o - (\hat{Κ} + \hat{Μ}) = 360^o - …… = 180^o$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

5.4. Να χαρακτηρίσετε <u>Σωστή</u> ή <u>Λάθος</u> κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
ii) Οι απέναντι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι πάντοτε παραπληρωματικές.
iii) Η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου είναι κάθετες.
iv) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^0.
v) Ένα τρίγωνο ΑΒΓ μπορεί να έχει $\hat{Α}_{εξ} + \hat{Β}_{εξ} = 180^0$.
vi) Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{Β}_{εξ} + \hat{Γ}_{εξ} = 300^0$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α.
vii) Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός εξαγώνου είναι 360^0.
viii) Το άθροισμα των γωνιών ενός 9-γώνου είναι 1620^0.
ix) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός 20-γώνου είναι 360^0.

5.5. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

i) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) είναι $\hat{Α}_{εξ} = 106^0$. Τότε κάθε μια από τις ίσες γωνίες του είναι ίση με:
Α. 77^0 **Β.** 50^0 **Γ.** 53^0 **Δ.** 100^0 **Ε.** 90^0

ii) Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{Α}_{εξ} + \hat{Β}_{εξ} = 270^0$, τότε η γωνία $\hat{Γ}$ του τριγώνου ισούται με:
Α. 60^0 **Β.** 30^0 **Γ.** 150^0 **Δ.** 90^0 **Ε.** 120^0

iii) Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{Α} = 104^0$, $\hat{Β} = 38^0$ και ΑΒ=8cm. Η πλευρά του ΑΓ ισούται με:
Α. 4cm **Β.** 6cm **Γ.** 8cm **Δ.** 5cm **Ε.** 10cm

iv) Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Η. Αν $\widehat{ΑΗΒ} = 125^0$, τότε η $\hat{Γ}$ ισούται με:
Α. 45^0 **Β.** 55^0 **Γ.** 60^0 **Δ.** 65^0 **Ε.** 70^0

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

5.6. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ αν δίνεται ότι:

i) $\hat{B} = 46^0$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

ii) $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^0$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 130^0$

iii) $\hat{A} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 2\hat{\Gamma}$ $\hat{A} = 2$

iv) Οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ανάλογες των αριθμών 3 , 4 και 5 αντίστοιχα.

v) Οι γωνίες $\hat{A}_{εξ}$, $\hat{B}_{εξ}$ και $\hat{\Gamma}_{εξ}$ είναι ανάλογες των αριθμών 4 , 6 και 10 αντίστοιχα.

5.7. Δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν κοινή βάση τη ΒΓ. Δείξτε ότι η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ.

5.8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΒΓ στο σημείο Δ. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή.

5.9. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 3\hat{B}$. Η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Δ. Δείξτε ότι καθένα από τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

5.10. Από ένα σημείο Ρ της διχοτόμου μιας γωνίας $x\hat{O}y$ φέρνουμε την $PA \perp Ox$. Αν η μεσοκάθετος του τμήματος ΟΡ τέμνει την Oy στο σημείο Β, να δείξετε ότι $BP \perp AP$.

5.11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της ΒΓ φέρνουμε κάθετη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε και την ΑΒ στο Ζ. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

5.12. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Στην ΑΓ παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ και στην προέκταση της ΒΑ παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΑΕ=ΑΔ. Να δείξετε ότι η ευθεία ΕΔ είναι κάθετη στη ΒΓ.

5.13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και φέρνουμε τη διχοτόμο ΒΔ. Αν από το Γ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΒΔ στο Ε, να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές.

5.14. Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και από τυχαίο σημείο Μ της διχοτόμου της φέρνουμε $MA \perp Ox$ και $AB \perp Oy$. Αν το τμήμα ΑΒ τέμνει τη διχοτόμο της $x\hat{O}y$ στο σημείο Ρ, να δείξετε ότι ΑΜ=ΑΡ.

5.15. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}_{εξ} = 120^0$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Να βρείτε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου.

[Απ. $\hat{A} = 60^0$, $\hat{B} = 80^0$, $\hat{\Gamma} = 40^0$]

5.16. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B}_{εξ} + \hat{\Gamma}_{εξ} = 218^0$. Να υπολογίσετε την $\hat{A}$.

[Απ.38^0]

5.17. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ η $\hat{A}$ είναι διπλάσια της $\hat{B}$.

i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ii) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

[Απ.ii)135^0]

5.18. Ποιο είναι το είδος ενός πολυγώνου, του οποίου το άθροισμα των γωνιών είναι 900^0;

[Απ.7-γωνο]

5.19. Ποιο είναι το είδος ενός πολυγώνου, του οποίου το άθροισμα των γωνιών είναι τετραπλάσιο του αθροίσματος των εξωτερικών γωνιών του;

[Απ.10-γωνο]

5.20. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ δείξτε ότι ισχύει

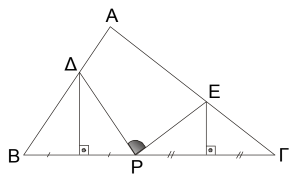
$$\hat{B}_{εξ} + \hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{A} + \hat{\Delta}.$$

5.21. Να βρείτε το είδος του κυρτού πολυγώνου, του οποίου το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του είναι 2,5 φορές το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του.

[Απ. 7-γωνο]

5.22. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Δείξτε ότι ΑΔ=ΔΓ και $ΑΓ \perp ΒΔ$.

5.23. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Ρ είναι τυχαίο και οι μεσοκάθετοι των ΒΡ, ΡΓ τέμνουν τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\Delta\hat{P}E = \hat{A}$.



5.24. Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A} = 120^o$. Οι μεσοκάθετες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ.

5.25. Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{B} = 74^o$. Στην προέκταση της πλευράς του ΒΓ παίρνουμε ένα σημείο Δ με $\Gamma\hat{\Delta}A = 40^o$. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα

i) ΓΔ και ΑΒ

ii) ΔΒ και ΔΑ

5.26. Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A} = 36^o$. Στην προέκταση της ΒΓ παίρνουμε τμήμα ΓΔ=ΓΑ και στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ=ΒΔ. Να δείξετε ότι ΕΑ=ΕΔ.

5.27. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη ΓΑ και παίρνουμε τμήμα ΑΕ=ΑΒ. Δείξτε ότι:

α) $A\hat{E}B = \dfrac{\hat{A}}{2}$

β) Η ΒΕ είναι παράλληλη της διχοτόμου της $\hat{A}$.

γ) $E\hat{B}\Gamma = 90^o + \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

5.28. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 2\hat{B}$ και $\hat{\Gamma} - \hat{B} = 36^o$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

5.29. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $3\hat{B}=4\hat{\Gamma}$. Η εξωτερική του γωνία στο Α είναι ίση με $\frac{7}{3}\hat{A}$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

5.30. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=80^0$. Αν Κ είναι το σημείο τομής της εξωτερικής διχοτόμου της $\hat{B}$ και της εσωτερικής διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{K}\Gamma$.

[Απ. 40^0]

5.31. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΔ, ΓΕ των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A\hat{\Delta}B + A\hat{E}\Gamma$.

[Απ. 135^0]

5.32. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζουν γωνία 58°. Να υπολογίσετε την $\hat{B}$.

[Απ. 64^0]

5.33. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^0$ και $\hat{\Gamma}=30^0$. Στο εξωτερικό του σχεδιάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΒΔΓ. Να δείξετε ότι:

i) ΑΒ//ΓΔ

ii) Αν οι ευθείες ΔΒ και ΓΑ τέμνονται στο σημείο Ε, να δείξετε ότι το Α είναι το μέσο του ΓΕ.

5.34. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta>\gamma$ η εξωτερική διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ε. Τότε

i) δείξτε ότι $A\hat{E}B = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

ii) αν ΑΚ το ύψος του και ΑΔ η διχοτόμος της $\hat{A}$, δείξτε ότι $K\hat{A}\Delta = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

5.35. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ και στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ=ΒΔ. Η ΕΔ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Δείξτε ότι:

i) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΖ είναι ισογώνια.

ii) Το τρίγωνο ΔΖΓ είναι ισοσκελές.

5.36. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}<90^o$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ=ΒΔ. Η ΕΔ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Δείξτε ότι:

i) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΖ είναι ισογώνια.

ii) Το τρίγωνο ΔΖΓ είναι ισοσκελές.

iii) Το Ζ είναι το μέσο της ΑΓ.

5.37. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Γ είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Από το Γ φέρνουμε τυχαία ημιευθεία Γx και παίρνουμε σε αυτήν τμήματα ΓΔ=ΓΑ και ΓΕ=ΓΒ. Να δειχθεί ότι $BE \perp A\Delta$.

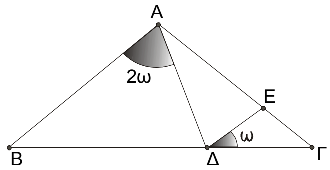
5.38. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρνουμε τις διχοτόμους του ΒΔ και ΓΕ. Η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$ τέμνει την ΓΕ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημείο Μ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΓΚΜ είναι ισοσκελές.

5.39. Στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε τα σημεία Μ, Ν τέτοια ώστε ΒΜ=ΑΝ.

α) Δείξτε ότι $\Gamma\hat{B}N = A\hat{\Gamma}M$

β) Να βρεθεί η γωνία $N\hat{P}\Gamma$, όπου Ρ το σημείο τομής των ΒΝ, ΓΜ.

[Απ. β) 60^0]



5.40. Στην πλευρά Ox μιας ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ παίρνουμε ένα σημείο Α και στην Oy διαδοχικά τα σημεία Β και Γ, με ΟΒ=ΟΑ. Από το Β φέρνουμε την ΒΔ κάθετη στην ΑΓ, η οποία τέμνει την προέκταση της Ox στο σημείο Ε. Να δείξτε ότι:

i) $E\hat{\Gamma}O = 45^o$

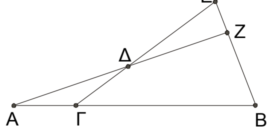
ii) ΒΖ = ΖΓ , όπου Ζ το σημείο τομής της ΑΒ με την ΓΕ

5.41. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ. Θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε στις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε $B\hat{A}\Delta = 2\,\Gamma\hat{\Delta}E$. Δείξτε ότι ΑΔ=ΑΕ.

5.42. Θεωρούμε μια ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και δύο τυχαία σημεία Α , Β των πλευρών της Ox και Oy αντίστοιχα. Από το σημείο Α φέρνουμε μια ευθεία που τέμνει την Oy στο σημείο Γ έτσι, ώστε $O\hat{A}\Gamma=30^o$ και από το σημείο Β φέρνουμε μια ευθεία που τέμνει την Ox στο σημείο Δ έτσι, ώστε $O\hat{B}\Delta=30^o$. Οι ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Ε. Να δείξετε ότι καθένα από τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

5.43. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=60^\circ+\hat{B}$, φέρνουμε τη διχοτόμο του ΓΔ και τη διχοτόμο ΔΕ της γωνίας $\Gamma\hat{\Delta}B$ (το Ε ανήκει στην πλευρά ΒΓ). Να δείξετε ότι $\Gamma\Delta \perp AE$.

* * * * *



Β΄ Ομάδα

5.44. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. Το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο. Δείξτε ότι $\hat{x} = \frac{\hat{y}+\hat{\omega}}{2}$.

5.45. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$ ώστε οι γωνίες $x\hat{A}B$, $y\hat{A}\Gamma$ να είναι εφεξής με την $\hat{A}$. Στην Ax παίρνουμε τμήμα ΑΒ'=ΑΒ και στην Ay τμήμα ΑΓ'=ΑΓ. Δείξτε ότι τα τμήματα ΒΓ' και ΓΒ' είναι ίσα και κάθετα.

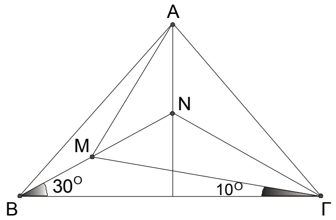
5.46. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) κατασκευάζουμε εξωτερικά του τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να δείξετε ότι:

i) ΒΕ=ΓΔ

ii) Οι ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΒΓ.

iii) ΔΕ//ΒΓ.

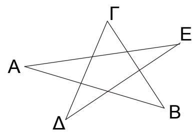
5.47. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A}=80^o$. Έστω Μ εσωτερικό σημείο του με $M\hat{B}\Gamma=30^o$ και $M\hat{\Gamma}B=10^o$. Αν Ν είναι το σημείο τομής της ΒΜ και της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, να υπολογιστούν οι γωνίες $B\hat{N}\Gamma$ και $A\hat{M}\Gamma$.



5.48. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta=\gamma$ και $\hat{A}>30^o$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε ένα σημείο Δ έτσι ώστε $B\hat{A}\Delta=30^o$ και στην ΑΓ σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΔ. Δείξτε ότι $E\hat{\Delta}\Gamma=15^o$.

5.49. Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+\hat{E}=180^o$$



5.50. Σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι οι φορείς των υψών ΒΕ, ΓΖ και της διχοτόμου ΑΔ, αν δεν συντρέχουν, σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο με γωνία κορυφής ίση με μια γωνία του αρχικού τριγώνου.

5.51. Πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β και Γ έτσι, ώστε ΒΓ=2ΑΒ. Με πλευρές τα ΑΒ και ΒΓ κατασκευάζουμε προς το ίδιο μέρος της ευθείας ε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Να δείξετε ότι $B\hat{\Delta}\Gamma=90^o$.

5.52. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι πλευρές του ΑΒ και ΓΔ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Ε και οι πλευρές του ΒΓ και ΑΔ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Ζ. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{E}$ και $\hat{Z}$ τέμνονται στο Κ. Να δείξετε ότι $E\hat{K}Z=\dfrac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 6.

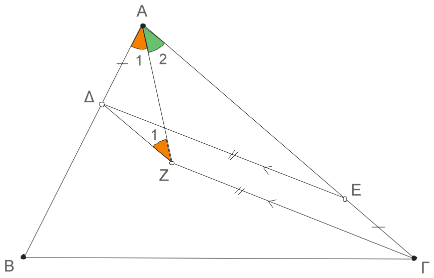
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

Ορισμός: Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Ιδιότητες παραλληλογράμμων	Κριτήρια για παραλληλόγραμμα
(i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. **(ii)** Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες. **(iii)** Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.	Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις: **(i)** Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες. **(ii)** Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες. **(iii)** Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες. **(iv)** Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

6.1. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε ώστε ΑΔ=ΓΕ. Από το Γ φέρνουμε παράλληλο προς την ΔΕ και πάνω σ' αυτή παίρνουμε σημείο Ζ, εσωτερικό του τριγώνου, ώστε ΓΖ=ΔΕ. Να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

Λύση:



Επειδή ΔΕ//…ΖΓ το τετράπλευρο ……… είναι …………………… .

Είναι $\left.\begin{matrix} ΕΓ = ΔΖ \\ ΕΓ = ΑΔ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ΔΖ= \ldots \Rightarrow Α\hat{Δ}Ζ$ …………

$\Rightarrow \hat{Α}_1 = \ldots$ (1)

Αφού ΔΕΓΖ ………………… $\Rightarrow$ ΔΖ// …

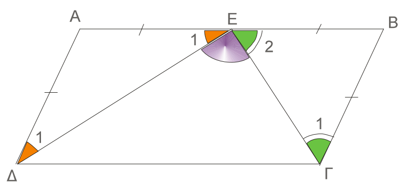
$\Rightarrow$ … //ΑΓ $\Rightarrow \hat{Α}_2 = \ldots$ (2) ως εντός ……………… γωνίες.

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ … = … $\Rightarrow$ ΑΖ ………………… της … .

6.2. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=2ΒΓ. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι ΓΕ ⊥ ΔΕ.

Λύση:

1ος τρόπος:



Επειδή ΑΒ=…ΒΓ και το Ε είναι το ……….. της …… θα είναι ΑΔ=……=ΕΒ=…… .

Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι …………………… με $\hat{Δ}_1 = \ldots$.

Είναι $\hat{Α} + \ldots + \hat{Ε}_1 = \ldots\ldots^0 \quad \Leftrightarrow$

$\hat{Α} + \ldots \hat{Ε}_1 = \ldots\ldots^0 \quad \Leftrightarrow$

$2\ldots = 180^0 - \ldots \quad \Leftrightarrow$

$\hat{Ε}_1 = \dfrac{\qquad}{\qquad}$.

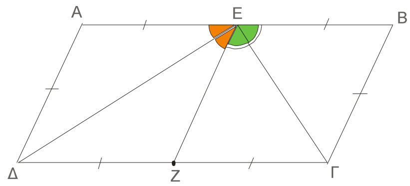
Όμοια στο …………… τρίγωνο ΒΓΕ είναι $\hat{E}_2 = \underline{\qquad\qquad}$.

Έχουμε $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad} = \dfrac{360^0 - \ldots. - \ldots.}{2} = \dfrac{\ldots\ldots^0 - (\ldots. + \ldots.)}{2}$

$= \dfrac{\ldots\ldots^0 - \ldots\ldots^0}{2} = \dfrac{\ldots\ldots^0}{2} = \ldots^0$.

Άρα $\Delta\hat{E}\Gamma = 180^0 - (\hat{E}_1 + \ldots) = \ldots\ldots^0 - 90^0 = \ldots^0$. Επομένως $\Gamma E \perp \ldots\ldots$.

<u>2ος τρόπος:</u>



Παίρνουμε το μέσο … της πλευράς ΓΔ και φέρνουμε το τμήμα …… .
Επειδή ΑΒ=2ΒΓ θα είναι
ΑΕ= … =ΒΓ= … =ΖΔ= … .
Το ΑΕ//= …… άρα το ΑΕΖΔ είναι ……………………… και επειδή έχει δύο διαδοχικές πλευρές ………… θα είναι ……………… . Τότε η διαγώνιός του ΕΔ θα ……………………… τη γωνία του ……… .
Όμοια η ΕΓ διχοτομεί τη γωνία ……… .
Άρα $\Delta\hat{E}\Gamma = 90^0$, γιατί σχηματίζεται από τις ………………………… των εφεξής και ……………………………… γωνιών $A\hat{E}Z$ και ……… . Επομένως $\ldots\ldots \perp E\Delta$.

Αν ξεκινήσουμε όπως στο 2ο τρόπο και εξηγήσουμε ότι το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος τότε

<u>3ος τρόπος:</u>

ΕΖ=ΔΖ=ΖΓ. Δηλαδή η ΕΖ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ και ΕΖ=$\frac{\Delta\Gamma}{2}$. Επομένως το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο με $\Delta\hat{E}\Gamma = 90^0$, οπότε $\Gamma E \perp E\Delta$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

6.3. Να χαρακτηρίσετε <u>Σωστή</u> ή <u>Λάθος</u> κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i) Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο απέναντι γωνίες του ίσες είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες και τις άλλες δύο απέναντι πλευρές του ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

iii) Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει $\hat{A} = 117^0$, $\hat{B} = 63^0$ και η $\hat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματική της $\hat{B}$. Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

iv) Οι διαγώνιες ενός παραλληλόγραμμου, διχοτομούν πάντοτε τις γωνίες του.

v) Τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

6.4. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις:

i) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ένα ζεύγος απέναντι πλευρών του είναι ……………………… και ………… .

ii) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι απέναντι γωνίες του είναι …………………………… .

iii) Τα ………… των πλευρών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν ……………………………… .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ Ομάδα</u>

6.5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.Αν οι ΑΛ, ΔΚ τέμνονται στο Μ και οι ΒΛ, ΓΚ στο Ν ,τότε το ΚΝΛΜ είναι παραλληλόγραμμο.

6.6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από το Α φέρουμε ευθεία ε//ΒΓ. Αν από τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρουμε τις ΜΚ//ΑΒ και ΜΛ//ΑΓ που τέμνουν την ε στα σημεία Κ και Λ, να δειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΚΛ είναι ίσα.

6.7. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΓΔ προς τις δύο κορυφές και παίρνουμε τα τμήματα ΔΕ = ΓΖ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΕ και ΒΖ τέμνονται κάθετα.

6.8. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ και παίρνουμε τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν αντίστοιχα ώστε ΒΚ=ΓΛ=ΔΜ=ΑΝ. Αποδείξτε ότι:

i) Το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν το ίδιο κέντρο.

6.9. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A} > 90^0$ και από το μέσο Μ της ΑΔ φέρνουμε κάθετη στην ΒΜ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ και την ΓΔ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΗ = ΔΗ + ΓΔ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7.

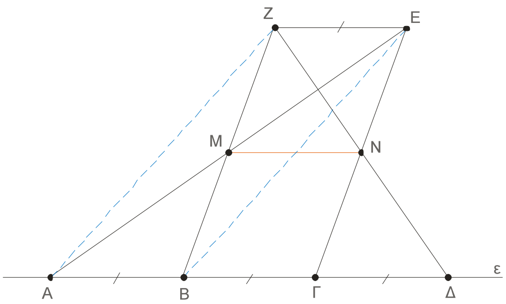
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ – ΡΟΜΒΟΣ – ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

7.1. Σε μία ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ ώστε ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ. Με πλευρά την ΒΓ κατασκευάζουμε ένα παραλληλόγραμμο ΒΓΕΖ με ΓΕ=2ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τμήματα ΑΕ και ΔΖ διχοτομούν τις πλευρές ΒΖ και ΓΕ αντίστοιχα.

ii) ΑΕ$\perp$ΔΖ.

Λύση:



i) Το ΒΓΕΖ είναι ………………………… οπότε ΒΓ//= …… και επειδή ΑΒ=…… θα είναι ΑΒ//= …… .Επομένως το ……… είναι …………………….. και οι διαγώνιοί του …… , …… διχοτομούνται στο σημείο … .
Όμοια το ……… είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του ΔΖ, …… …………………….. στο σημείο … .

ii) Τα σημεία Μ, Ν είναι τα ……….. των ΒΖ και …… . Επειδή ΓΕ=ΒΖ=2…… θα είναι ΒΜ=……=ΖΕ=……=ΓΝ=ΒΓ. Είναι ΜΖ//=…… , οπότε το ΜΖΕΝ είναι …………………………… και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, π.χ. ΜΖ=…… , άρα το ΜΖΕΝ είναι ……………… . Επομένως οι διαγώνιοί του …… , …… θα τέμνονται ……………… . Άρα ΑΕ$\perp$…… .

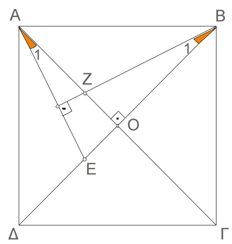
7.2. Θεωρούμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και το κέντρο του Ο. Παίρνουμε ένα σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Η κάθετη από το Β προς την ΑΕ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

i) ΒΖ=ΑΕ.

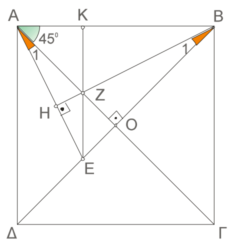
ii) ΓΖ=ΒΕ.

iii) Αν η ΕΖ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Κ, τότε το τρίγωνο ΑΚΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση:



i) Οι διαγώνιοι του ………………………… ΑΒΓΔ τέμνονται …………………… στο Ο. Τα …………………… τρίγωνα ΒΟΖ και ΑΟΕ έχουν:
ΟΒ=ΟΑ και $\hat{B}_1 = \ldots$ γιατί είναι οξείες και έχουν τις πλευρές τους …………………… .
Άρα τα δύο τρίγωνα είναι ……….. , επομένως ……=…… .



ii) Από το **(i)** εφ’ όσον τα τρίγωνα ……… και ……… είναι ……… θα έχουμε ότι ΟΖ=…… .
Είναι ΓΖ=ΓΟ+ …… = …… + ΟΕ = …… .

iii) Στο τρίγωνο ΑΕΒ τα ΑΟ, ΒΗ είναι ……… . Άρα το Ζ θα είναι το …………………….. του τριγώνου ……… . Τότε το ΕΚ είναι το τρίτο ……….. . Επομένως, το τρίγωνο ΑΚΖ είναι …………………… και επειδή $K\hat{A}Z = \ldots^0$ ως γωνία πλευράς-διαγωνίου του τετραγώνου, το τρίγωνο ΑΚΖ θα είναι και ………………….

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

7.3. Να χαρακτηρίσετε Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Αν Ο είναι το κέντρο ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΟΑ=ΟΒ, τότε το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
II. Οι διαγώνιες ενός ρόμβου είναι ίσες.
III. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.
IV. Ένα τετράπλευρο που έχει τις διαγώνιες κάθετες είναι πάντοτε ρόμβος.
V. Ένα τετράπλευρο που έχει τις διαγώνιες ίσες είναι πάντοτε ορθογώνιο.
VI. Ένα τετράπλευρο που έχει τις διαγώνιες κάθετες και ίσες είναι πάντοτε τετράγωνο.

7.4. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις:

I. Ένα παραλληλόγραμμο με διαγώνιες κάθετες είναι ……………………… .
II. Ένας ρόμβος με γωνίες ίσες είναι ………………………
III. Ένα παραλληλόγραμμο με διαγώνιες ίσες είναι ……………………… .
IV. Ένα ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες είναι ……………………… .
V. Ένα παραλληλόγραμμο του οποίου μια διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του είναι ………………… .

7.5. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Δύο πλευρές ενός ρόμβου είναι ίσες με $4x-9$ και $2x+5$. Η περίμετρός του ισούται με:
Α. 14 **Β.** 7 **Γ.** 30 **Δ.** 28 **Ε.** 76

II. Ένα τετράπλευρο με διαγώνιες ίσες είναι πάντοτε:
Α. Ορθογώνιο **Β.** Ρόμβος **Γ.** Τετράγωνο
Δ. Κανένα από αυτά

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

7.6. Από ένα σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας, φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές της. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που σχηματίζεται είναι ρόμβος.

7.7. Θεωρούμε έναν ρόμβο ΑΒΓΔ. Η κάθετος από το Β προς την ΑΔ, τέμνει την κάθετο από το Δ προς την ΑΒ στο σημείο Κ. Η κάθετος από το Β προς την ΓΔ, τέμνει την κάθετο από το Δ προς την ΒΓ στο σημείο Λ. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΒΚΔΛ είναι ρόμβος.

7.8. Κατασκευάζουμε έναν ρόμβο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά του ΓΔ και προς τις δύο κορυφές Γ , Δ. Στην προέκταση προς το μέρος του Δ, παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΔΕ=ΔΓ και στην προέκταση προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Ζ ώστε ΓΖ=ΓΔ. Να δείξετε ότι $ΕΑ \perp ΖΒ$.

7.9. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = ΑΓ. Συνδέουμε την κορυφή Α με το μέσο Μ της ΒΓ και προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ.
Να δείξετε ότι:
i) $ΑΜ \perp ΒΓ$
ii) Τα σημεία Δ, Γ, Ε είναι συνευθειακά
iii) Το σημεία Γ είναι το μέσο της ΔΕ
iv) Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΒΕΓ;

7.10. Έξω από ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ. Να υπολογίσετε τη γωνία $Α\hat{Γ}Ε$.
[Απ. 30^0]

7.11. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΔΜ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι $Ε\hat{Γ}Δ = 135^0$.

7.12. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΑΔ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ, παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ=ΔΖ. Να αποδείξετε ότι:
i) ΒΖ=ΓΕ. **ii)** $ΒΖ \perp ΓΕ$.

7.13. Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ και παίρνουμε σημείο Μ. Προεκτείνουμε την ΒΓ και παίρνουμε σημείο Ν, ώστε ΓΝ=ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΝ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

7.14. Εκτός τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα, ΑΒΚ, ΒΓΛ, ΓΔΜ και ΔΑΝ. Αποδείξτε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

7.15. Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Εκτός αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Φέρνουμε το ύψος ΑΚ. Να αποδείξετε ότι:
i) $ΑΚ \perp ΕΗ$.
ii) ΕΗ//ΔΖ.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

7.16. Εκτός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τετράγωνα με πλευρές τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Αν Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα κέντρα των τετραγώνων, να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

7.17. Έστω Ο το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ και Μ το συμμετρικό του Ο ως προς την ΑΓ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Δ. Αποδείξτε ότι $Μ\hat{Ο}Δ = 90^0$.

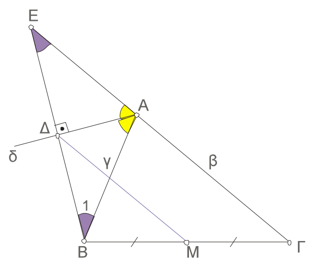
ΕΝΟΤΗΤΑ 8.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

8.1. Από την κορυφή Β ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία κάθετη στην εξωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$ η οποία τέμνει αυτή στο Δ και την προέκταση της ΑΓ στο Ε. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i) ΓΕ=β+γ **ii) $ΔΜ=\frac{β+γ}{2}$** **ii) $Β\hat{Δ}Μ=\frac{\hat{A}}{2}$**

Λύση:



i) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι …………………… γιατί το ΑΔ είναι ……….. και …………………… .Άρα ΑΒ= …… και ΓΕ=ΑΓ+ …… = …… + ΑΒ=β+γ.

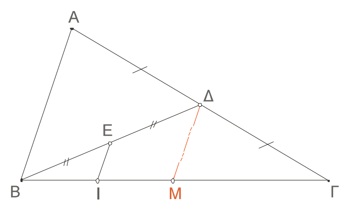
ii) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ το ΑΔ είναι και …………………… οπότε το Δ είναι το ……….. της ΒΕ. Το τμήμα ΔΜ ενώνει τα ……….. των πλευρών …… και …… του τριγώνου ……… , άρα $ΔΜ=\frac{\cdots\cdot}{2}\overset{(i)}{=}\frac{\cdots+\cdots}{2}$.

iii) Ακόμα ΔΜ//…… οπότε $Β\hat{Δ}Μ=\ldots$ (1) ως εντός-εκτός και επί τα αυτά γωνίες.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ η $\hat{A}$ είναι …………………… άρα
$\hat{A}=\hat{B}_1+\ldots \Leftrightarrow \hat{A}=2\ldots \Leftrightarrow \hat{E}=\frac{\cdots\cdot}{2}$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ……… $=\frac{\cdots\cdot}{2}$.

8.2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ι της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $ΒΙ=\frac{ΒΓ}{4}$. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου ΒΔ, να αποδείξετε ότι $ΙΕ//=\frac{ΑΒ}{4}$

Λύση:



Παίρνουμε το μέσο Μ της πλευράς …… . Επειδή
$ΒΙ=\frac{ΒΓ}{4}=\frac{\frac{ΒΓ}{2}}{\cdots}=\frac{ΒΜ}{\cdots}$, το σημείο … είναι το μέσο του τμήματος …… .Στο τρίγωνο ……… το τμήμα ΙΕ ενώνει τα …………… των πλευρών …… και …… , οπότε ΙΕ$//=\frac{\cdots\cdots}{2}$ (1)
Στο τρίγωνο ……… το τμήμα ΔΜ ενώνει τα …………… των πλευρών …… και …… , οπότε $ΔΜ//=\frac{\cdots\cdots}{2}$ (2)

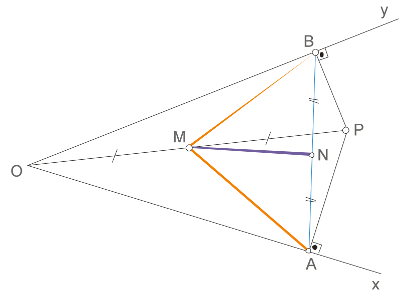
Από (1) και (2) έχουμε $ΙΕ//=\frac{\frac{\cdots\cdot}{2}}{\cdots} \Leftrightarrow ΙΕ//=\frac{\cdots\cdot}{\cdots}$.

8.3. Στο εσωτερικό μιας γωνίας $x\hat{O}y$ παίρνουμε ένα σημείο Ρ και φέρνουμε $ΡΑ\perp Οx$ και $ΡΒ\perp Οy$. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των τνημάτων ΟΡ και ΑΒ αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι:
i) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές
ii) $ΜΝ\perp ΑΒ$
iii) Αν $ΟΓ\perp ΑΒ$ και $ΟΔ\perp ΑΒ$ τότε ΑΓ=ΒΔ.

Λύση:

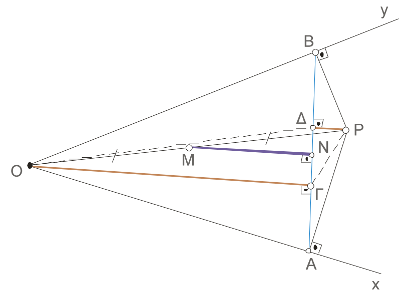
i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ η ΑΜ είναι η …………………… που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα …… , άρα $AM=\frac{\cdots}{2}$ **(1)**. Στο ………………… τρίγωνο ΟΒΡ η …… είναι η …………………… που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα …… , άρα $BM=\frac{\cdots}{2}$ **(2)**.

Από **(1)** και **(2)** έχουμε …… = …… .



ii) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΒ το ΜΝ είναι …………………… οπότε θα είναι και ………… . Επομένως, $\ldots\ldots \perp \ldots\ldots$.

iii) Επειδή $O\Gamma \perp AB$ και $O\Delta \perp \ldots\ldots$, τότε ……//…… . Το ΟΓΡΔ είναι ………………… . $MN \perp \ldots\ldots$ οπότε ΜΝ … ΟΓ, ΡΔ. Το Μ είναι το ………….. της διαγωνίου ΟΡ του ………………… ΟΓΡΔ και το …… είναι παράλληλο στις βάσεις του ΟΓ, …… , άρα το Ν θα είναι το ………….. της διαγωνίου του …… . Δηλαδή ΓΝ=…… . Είναι ΑΓ=ΑΝ– …… και ΒΔ= ……– ΝΔ . Όμως ΑΝ=…… και ……=ΔΝ. Επομένως, …… = …… .

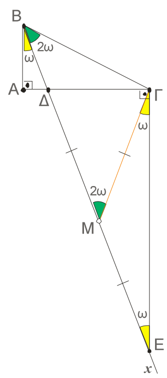


8.4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^0$ και φέρνουμε ημιευθεία Bx τέτοια ώστε $A\hat{B}x=\frac{1}{3}\cdot\hat{B}$, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Δ. Στο Γ φέρνουμε κάθετη στην ΑΓ η οποία τέμνει την Bx στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΔΕ=2·ΒΓ.

Λύση:

Το ΔΕ είναι υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου και θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι διπλάσιο του ΒΓ. Αν πάρουμε το μέσο του ΔΕ

Έστω $A\hat{B}x=\hat{\omega}$. Τότε $\hat{B}=3\ldots$ και $\Delta\hat{B}\Gamma=\ldots\hat{\omega}$ (1). Παίρνουμε το μέσο Μ της ΔΕ και φέρνουμε το τμήμα ΓΜ. $AB\perp\ldots\ldots$ και ΓΕ…ΑΓ, άρα ΑΒ//…… . $\hat{E}=A\hat{B}x=\ldots$ ως εντός ………………… γωνίες. Στο …………………….. τρίγωνο ΔΓΕ η ΓΜ είναι η ………………… που αντιστοιχεί στην ………………………… ΔΕ. Άρα ΓΜ=……=…… οπότε το τρίγωνο ……… είναι …………………… και $M\hat{\Gamma}E=\ldots=\hat{\omega}$. Η γωνία $\Gamma\hat{M}\Delta$ είναι …………………….. του τριγώνου ……… οπότε $\Gamma\hat{M}\Delta=\hat{\omega}+\ldots=2\ldots$ (2). Από και έχουμε $\Delta\hat{B}\Gamma=\ldots$, επομένως το τρίγωνο ……… είναι …………………… με ΒΓ=…… .
Άρα ΔΕ=2…… = 2…… .



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

8.5. Να χαρακτηρίσετε <u>Σωστή</u> ή <u>Λάθος</u> κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

i) Τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου σχηματίζουν ρόμβο.

ii) Τα μέσα των πλευρών ενός ρόμβου σχηματίζουν ορθογώνιο.

iii) Τα μέσα των πλευρών ενός τετραγώνου σχηματίζουν τετράγωνο.

iv) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^0$, ο κύκλος με διάμετρο την πλευρά ΒΓ διέρχεται από την κορυφή Α.

8.6. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\Gamma=x+22$ και $\Delta E=2x+5$, όπου Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ. Η πλευρά του ΒΓ ισούται με:

Α. 28 **Β.** 32 **Γ.** 34 **Δ.** 26 **Ε.** 25

II. Ένα κυρτό τετράπλευρο έχει τις διαγώνιες του ίσες και κάθετες. Το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του είναι:

Α. Τετράγωνο **Β.** Ρόμβος **Γ.** Ορθογώνιο **Δ.** Κανένα από αυτά

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

8.7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Ο στο εσωτερικό του και τα μέσα Κ, Λ, Μ των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι διπλάσια της περιμέτρου του τριγώνου ΚΛΜ.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ισογώνια.

8.8. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμήματα $ΑΔ=\frac{ΑΒ}{2}$ και $ΑΕ=\frac{ΑΓ}{2}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ//=\frac{ΒΓ}{4}$.

8.9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ φέρνουμε την εξωτερική διχοτόμο $Αδ$ της $\hat{Α}$. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στην $Αδ$ η οποία την τέμνει στο σημείο Ε και την ΑΓ την τέμνει στο σημείο Δ. Δείξτε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
β) Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε $ΕΜ=\frac{β+γ}{2}$.
γ) $Β\hat{Ε}Μ = \frac{\hat{Α}}{2}$

8.10. Από την κορυφή Δ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε τμήμα ΔΕ//=ΑΒ, προς το εσωτερικό του τετραπλεύρου. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων του ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι ΕΓ//=2ΜΝ.

8.11. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ=ΑΔ και $Γ\hat{Β}Δ=90^0$. Να αποδείξετε ότι η παράλληλη από το Α προς την ΒΓ διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΓΔ.

8.12. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις διαμέσους του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οι οποίες τέμνονται στο Θ. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΔΕΖ είναι ίσα.

8.13. Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε καθέτους στις εξωτερικές διχοτόμους των $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ που τις τέμνουν στα σημεία Μ και Ν. Αποδείξτε ότι:
α) ΜΝ//ΒΓ.
β) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι διπλάσια του τμήματος ΜΝ.
γ) Η ΜΝ διέρχεται από τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ.

8.14. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{Β}=2\hat{Α}$, $\hat{Γ}=3\hat{Α}$.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.
β) Να δείξετε ότι $ΒΓ=\frac{ΑΒ}{2}$.

8.15. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ και παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι διπλάσια της περιμέτρου του τριγώνου ΔΕΖ.

8.16. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και προεκτείνουμε τη βάση του ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Φέρνουμε το τμήμα ΔΑ και το προεκτείνουμε κατά τμήμα ΑΕ = ΔΑ. Τέλος, φέρνουμε το τμήμα ΒΕ. Να δείξετε ότι:
α) $\hat{Α} = 90^0$
β) ΑΓ // ΕΒ.

8.17. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90^0$) η μία οξεία γωνία του είναι 30^0. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος και το ύψος που αντιστοιχούν στην υποτείνουσα, τριχοτομούν την $\hat{Α}$.

8.18. Σε ένα μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η $\hat{Β}=2\hat{Γ}$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και παίρνουμε το μέσο Ε της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη στη διχοτόμο της $\hat{Β}$.

8.19. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΒΓ, ΑΗ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΔΜΕ και ΔΝΕ είναι ισοσκελή.
β) $ΜΝ \perp ΔΕ$.

8.20. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και το ορθόκεντρό του Η. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΗ, ΒΓ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι $Μ\hat{Ε}Ν=90^0$.

8.21. Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει $\hat{Α}=120^0$. Η διχοτόμος της $\hat{Δ}$ διέρχεται από το μέσο Ε της ΑΒ.
α) Να υπολογίσετε την $\hat{Δ}$.
β) Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές και ΑΒ=2ΑΔ.
γ) Αν ΕΖ είναι ύψος του παραλληλογράμμου, τότε δείξτε ότι ΔΕ=2ΕΖ.

8.22. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Φέρνουμε τη διχοτόμο του ΒΔ καθώς και μια ευθεία κάθετη στη ΒΔ στο σημείο Δ, η οποία τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι ΒΕ=2ΔΓ.

8.23. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τη διχοτόμο του ΒΔ. Η διχοτόμος της $Β\hat{Δ}Γ$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Μ. Η διχοτόμος της $Β\hat{Δ}Α$ προεκτεινόμενη τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι ΜΝ=2ΒΔ.

8.24. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90^0$), τη διάμεσό του ΑΜ και μια ευθεία ε κάθετη στην ΑΜ σε ένα τυχαίο σημείο της. Η ε τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Ρ είναι το μέσο του τμήματος ΔΕ, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΡ και ΒΓ τέμνονται κάθετα.

8.25. Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90^0$) με ΑΒ<ΑΓ. Η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ. Προεκτείνουμε την ΓΑ κατά τμήμα ΑΕ=ΑΔ. Η ευθεία της διαμέσου ΑΜ, του τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει την ευθεία ΒΕ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΕΖ=ΕΑ **β)** ΒΖ=ΑΓ

* * * * *

Β΄ Ομάδα

8.26. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΓ=ΑΔ και παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ των ΓΔ και ΑΒ αντίστοιχα. Αν η ΖΕ τέμνει την ΒΓ στο Η και την ΑΔ στο Κ, αποσείξτε ότι $Z\widehat{H}B = Z\widehat{K}A$.

(Υπόδειξη: Να πάρετε το μέσο της ΑΓ.)

8.27. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ, ΑΒ=α, ΓΔ=2α και ΔΒ κάθετη στη ΒΓ. Έστω Μ το μέσον της ΓΔ, Ο το σημείο τομης των διαγωνίων του τετραπλεύρου ΑΒΜΔ, Κ το σημείο τομής των ευθειών ΔΑ, ΓΒ και Λ το σημείο τομής των ευθειών ΚΟ και ΑΒ. Αποδείξτε ότι η ευθεία ΔΛ περνά από το μέσο του ΚΒ

8.28. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ.Από το Β φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο της $\hat{A}$ η οποία τέμνει τη διχοτόμο στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε κάθετη στην εξωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$ η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Αποδείξτε ότι:

α) ΔΜ//ΑΓ και $ΔΜ = \frac{β-γ}{2}$ **β)** $ΑΖ = \frac{β-γ}{2}$

8.29. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ρ στο εσωτερικό του. Αν $Ρ_1$, $Ρ_2$, $Ρ_3$ είναι τα συμμετρικά του Ρ ως προς τα μέσα των ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Οι $ΑΡ_1$, $ΒΡ_2$, $ΓΡ_3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο Σ.

β) Η ΡΣ διέρχεται από το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 9.

ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

9.1. Να χαρακτηρίσετε Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Ένα παραλληλόγραμμο είναι και τραπέζιο.

II. Η διάμεσος ενός τραπεζίου διχοτομεί τις διαγώνιές του.

III. Ανά δύο οι γωνίες ενός τραπεζίου είναι παραπληρωματικές.

IV. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του, οι οποίες τέμνονται σε ένα σημείο. Τότε δημιουργούνται δύο ισοσκελή τρίγωνα.

9.2. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις:

I. Οι διαγώνιοι ενός ισοσκελούς τραπεζίου είναι …………… .

II. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο το τμήμα που ενώνει τα μέσα των βάσεών του είναι …………………………… αυτών.

9.3. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

9.4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΓ=8. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, τότε η διάμεσος του τραπεζίου ΚΛΓΒ ισούται με:

Α. 5 **Β.** 8 **Γ.** 6 **Δ.** 10 **Ε.** 12

9.5. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΑΒ=x και ΓΔ=$\frac{5}{4}x$.

Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ ώστε ΑΕ=$\frac{1}{4}x$ και Ζ, Η είναι τα μέσα των ΔΕ, ΒΓ τότε η ΖΗ ισούται με:

Α. x **Β.** $\frac{19}{24}x$ **Γ.** $\frac{5}{6}x$ **Δ.** $\frac{23}{24}x$

9.6. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^0$, $\hat{B}=60^0$, ΓΔ=20cm και ΒΓ=80cm. Η διάμεσός του ισούται με:

Α. 50cm **Β.** 40cm **Γ.** 45cm **Δ.** 30cm

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

9.7. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ=ΒΓ + ΑΔ παίρνουμε το μέσο Κ της ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

9.8. Δίνεται ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και το κέντρο του Ο. Τα μέσα των ΔΟ και ΓΟ είναι τα σημεία Κ, Λ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΟΚ και ΒΟΛ είναι ίσα.

β) Τα ΚΛΓΔ και ΚΛΒΑ είναι ισοσκελή τραπέζια.

9.9. Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιό του ΒΔ κατά τμήμα ΔΕ = ΒΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η. Να δείξετε ότι:

α) ΔΗ = $\frac{AB}{2}$

β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΓΔΖ είναι ίσα, όπου Ζ είναι το μέσο του της ΑΔ.

γ) ΓΖ $\perp$ ΑΕ.

9.10. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ = ΑΒ +ΒΔ και το μέσο Μ της διαγωνίου ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $B\widehat{M}\Delta=90^0$.

9.11. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ. Στην πλευρά του ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ ώστε ΒΔ = $\frac{1}{4}$ΒΓ. Επίσης παίρνουμε τα μέσα Ε και Μ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το τμήμα ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΕΔ. Να δείξετε ότι:

α) Το ΕΜΖΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το ΑΜΔΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Αν Η είναι το μέσο του ΑΜ, τότε το ΕΗΜΔ είναι ρόμβος και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.

9.12. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ < ΔΓ και τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του ΒΔ και ΑΓ. Αν Ρ είναι το μέσο του ΚΔ και Σ το μέσο του ΛΓ, να αποδείξετε ότι ΑΒ + 4ΡΣ = 3ΓΔ.

9.13. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΔΓ = 2ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΒΔ και ΑΓ. Οι ΑΔ και ΒΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Ο. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΟΑ και ΟΒ, τότε το ΜΝΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

9.14. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) κατασκευάζουμε εξωτερικά του τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{E}H = \frac{\hat{A}}{2}$.

β) ΒΕ = ΓΗ.

γ) Το ΒΓΗΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

9.15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και μία ευθεία ε που διέρχεται από το Α. Αν Β', Γ' είναι οι προβολές των Β, Γ στην ε και Μ το μέσο του ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΒ'= ΜΓ'.

9.16. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$, ΔΓ=2ΑΒ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Gamma\Delta$ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Μ. Το τμήμα ΑΕ τέμνει την ΒΔ στο Ν. Τότε:

α) Βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.

β) Το Μ είναι μέσο του ΒΕ.

γ) ΑΕ = ΒΔ και $AE \perp B\Delta$.

δ) $MN = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$.

9.17. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ = ΑΔ+ΒΓ. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ τέμνονται στην ΑΒ.

* * * * *

<u>Β΄ Ομάδα</u>

9.18. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΘ. Φέρνουμε $\Delta\Delta' \perp B\Gamma$ και $ZZ' \perp B\Gamma$ και το ύψος του ΑΗ του τριγώνου. Αποδείξτε ότι:

α) ΔΔ'+ ΖΖ'= ΒΓ.

β) Τα σημεία Δ, Α, Ζ είναι συνευθειακά.

γ) Αν Ρ είναι το μέσο του ΔΖ, τότε το τρίγωνο ΒΡΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

δ) Η ευθεία ΑΗ διέρχεται από το σημείο τομής των ΔΕ και ΖΘ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 10.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

10.1. *Να χαρακτηρίσετε Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*

I. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^0$, ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ διέρχεται από την κορυφή Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

10.2. Γράφουμε ένα κύκλο (Κ,ρ) και φέρουμε μία ακτίνα του ΚΑ. Με διάμετρο την ΚΑ γράφουμε έναν άλλο κύκλο. Να αποδείξετε ότι κάθε χορδή ΑΒ του κύκλου (Κ,ρ) διχοτομείται από τον άλλο κύκλο.

10.3. Σε κύκλο (Ο,R) γράφουμε μια διάμετρο ΑΒ και φέρνουμε μία χορδή ΑΓ ώστε $B\hat{A}\Gamma=30^0$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

i) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

ii) ΒΔ = R.

iii) Αν Μ το μέσο του ΟΒ, τότε $\Gamma M \perp AB$.

10.4. Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο,R) και μία χορδή του ΑΒ=R. Η διχοτόμος της γωνίας $O\hat{A}B$ τέμνει τον κύκλο στο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $O\hat{B}A$ τέμνει τον κύκλο στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

i) ΔΑ=ΑΒ=ΒΓ

ii) το τμήμα ΔΓ είναι διάμετρος του κύκλου.

10.5. Σε κύκλο (Ο,R) γράφουμε μια διάμετρο ΑΒ και σχεδιάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Δ, Ε είναι αντίστοιχα τα σημεία τομής των ΑΓ, ΒΓ με τον κύκλο, να δείξετε ότι:

i) Τα ΑΕ, ΒΔ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ.

ii) Το ΟΔΕΒ είναι ρόμβος.

iii) Το ΑΔΕΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

10.6. Θεωρούμε έναν κύκλο και δύο κάθετες χορδές του ΑΒ και ΓΔ. Ονομάζουμε Ε το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ. Να δείξετε ότι ΑΕ=ΒΔ.

10.7. Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνου ΑΒΓ, στον οποίο είναι ΑΒ<ΑΓ. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και έστω Ε το αντιδιαμετρικό σημείο του Α. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{A}$ και $\Delta\hat{A}E$ έχουν κοινή διχοτόμο.

10.8. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σ' ένα κύκλο. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τον κύκλο στο Δ και η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας του τριγώνου στο Α, τον τέμνει στο Ε. Να δείξετε ότι $E\Delta \perp B\Gamma$.

10.9. Θεωρούμε τα σημεία επαφής Δ, Ε, Ζ του εγγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου ΑΒΓ με τις πλευρές του. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ με τη βοήθεια των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

10.10. Ας είναι Ε, Ζ, Η, Θ αντίστοιχα τα μέσα των διαδοχικών τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός κύκλου. Να αποδείξετε ότι $EH \perp Z\Theta$. Συμβαίνει το ίδιο όταν τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των χορδών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ;

10.11. Δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Θεωρούμε μία χορδή ΑΒ του κύκλου (Κ,R) και μία χορδή ΑΓ του κύκλου (Λ,ρ), κάθετη στην ΑΒ. Να δείξετε ότι $KB // \Lambda\Gamma$.

10.12. Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Να δείξετε ότι, η γωνία των εφαπτομένων του κύκλου στα σημεία Α και Γ είναι ίση με τη γωνία των ευθειών ΑΔ και ΒΓ.

10.13. Έστω ένας κύκλος, ένα σημείο του Α και ένα εσωτερικό σημείο Ρ του κυκλικού δίσκου. Η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΡ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Τα τμήματα ΒΡ και ΓΡ προεκτεινόμενα τέμνουν το κύκλο στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΔΒ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Delta}E$.

10.14. Δύο κύκλοι εφάπτονται (εξωτερικά ή εσωτερικά) στο σημείο Α. Μία ευθεία διέρχεται από το Α και τέμνει τον ένα κύκλο στο σημείο Β και τον άλλο στο σημείο Γ. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 των κύκλων αυτών στα σημεία Β και Γ είναι παράλληλες.

10.15. Οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι σημεία ενός κύκλου. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα Β και Γ τέμνονται στο σημείο Δ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την εφαπτόμενη του κύκλου στο Α, η οποία τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΔΕ=ΔΖ.

10.16. Σε κύκλο διαμέτρου ΑΒ φέρουμε δύο παράλληλες χορδές ΑΓ και ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΓ=ΒΔ και
β) η ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

10.17. Θεωρούμε ένα κύκλο και μία διάμετρό του ΑΒ. Στην προέκταση της ΑΒ προς το Β παίρνουμε ένα σημείο Γ και φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ του κύκλου. Η κάθετος από το Γ προς την ΑΓ τέμνει την ευθεία ΑΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές.

10.18. Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Ένας κύκλος διέρχεται από τα Α και Β και εφάπτεται της ΒΓ στο Β. Ο κύκλος αυτός τέμνει πάλι την ΑΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.

* * * * *

<u>Β΄ Ομάδα</u>

10.19. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του οποίου οι κορυφές Α, Δ, Γ είναι σημεία ενός κύκλου (Ο,ρ). Φέρνουμε τη διάμετρο ΔΟΕ. Δείξτε ότι $ΒΕ \perp ΑΓ$.

10.20. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{Α}=90^0$, φέρνουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Ο κύκλος με διάμετρο την ΑΜ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ν. Το τμήμα ΓΝ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ρ. Ν αποδείξετε ότι:
α) ΑΚ = 2ΚΜ
β) $Μ\hat{Γ}Ν = Ρ\hat{Α}Γ$

10.21. Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (Ο,R) τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η. Από την κορυφή Β φέρουμε τη χορδή ΒΔ του κύκλου, κάθετη στη ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΔ \perp ΑΓ$
β) ΒΔ=ΑΗ και
γ) $ΟΜ=\frac{ΑΗ}{2}$, όπου Μ το μέσο της ΒΓ.

10.22. Θεωρούμε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, ένα σημείο του Γ και το μέσο Μ του τόξου ΑΓ. Η ευθεία ΑΓ τέμνει την ΜΒ στο Δ και την κάθετο από το Μ προς την ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΕΜ=ΕΑ=ΕΔ.

10.23. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο του τόξου ΒΓ, να δείξετε ότι ΜΑ=ΜΒ+ΜΓ.
(*<u>Υπόδειξη:</u> Να φέρετε από το Β παράλληλη προς την ΜΓ.*)

ΕΝΟΤΗΤΑ 11.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

11.1. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

I. Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε:

Α. $\hat{A}+\hat{B}=180^0$ **Β.** $\Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$ **Γ.** $\hat{A}=\hat{\Gamma}$ **Δ.** $\hat{A}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

11.2. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ένα εσωτερικό σημείο Δ του ύψους του ΑΔ. Φέρουμε το κάθετο τμήμα ΔΕ προς την ΑΒ και το κάθετο τμήμα ΔΖ προς την ΑΓ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

11.3. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ , με $\hat{A}=90^0$, η $\hat{B}=30^0$. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετο στην ευθεία ΑΜ που την τέμνει στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι εγγράψιμο και ΑΔ=ΔΕ=ΕΒ.

11.4. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α, Β τέμνονται στο Δ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι εγγράψιμο.

11.5. Γράφουμε ένα κύκλο, μία χορδή του ΑΒ και παίρνουμε το μέσο Μ του ενός από τα δύο τόξα με άκρα τα Α και Β καθώς και δύο εσωτερικά σημεία Γ και Δ του άλλου τόξου. Οι χορδές ΜΓ και ΜΔ τέμνουν τη χορδή ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ. Δείξτε ότι τα σημεία Γ, Δ, Ε και Ζ είναι ομοκυκλικά.

11.6. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) με ΑΒ<ΑΓ. Φέρνουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και στο σημείο Κ φέρνουμε κάθετη στη ΒΓ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ και την ΒΑ στο σημείο Ρ.
Να δείξετε ότι:
i) Το τετράπλευρο ΒΚΖΑ είναι εγγράψιμο.
ii) Το τρίγωνο ΒΚΖ είναι ισοσκελές.
iii) ΡΚ = ΚΓ.

11.7. Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σ'ένα κύκλο με κέντρο Ο. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ. Να δείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ και Ο είναι ομοκυκλικά.

11.8. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) εγγεγραμμένο σ'αυτόν. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Δ, Ε και Ο είναι ομοκυκλικά.

11.9. Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,ρ). Οι μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου τέμνονται στο σημείο Ε. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΔΚΒ είναι εγγράψιμο.

11.10. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ προς το μέρος των Β, Γ και παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΒΔΕ και ΓΔΖ τέμνονται και σ' ένα δεύτερο σημείο Μ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΜΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

11.11. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Μ, Ν αντίστοιχα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ. Η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Δ και η κάθετος από το Ν στην ΝΔ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να δείξετε ότι $N\hat{\Delta}E=\hat{A}$.

11.12. Κατασκευάζουμε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, γράφουμε δύο ίσες χορδές του ΒΓ , ΓΔ και παίρνουμε ένα σημείο Ε του τόξου ΑΔ. Οι ευθείες ΑΓ, ΒΕ τέμνονται στο σημείο Κ και οι ευθείες ΑΔ, ΓΕ τέμνονται στο σημείο Ρ. Να δείξετε ότι $KP\perp A\Delta$.

11.13. Σε ένα κύκλο φέρνουμε μία διάμετρό του ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΑΔ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Β τέμνει την ευθεία ΑΓ στο Ε και την ευθεία ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΖΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

11.14. Έστω κύκλος (Ο,ρ), μία χορδή του ΑΒ και ε_1, ε_2 οι εφαπτόμενες του κύκλου στα Α και Β αντίστοιχα. Παίρνουμε ένα σημείο Μ της χορδής ΑΒ και φέρνουμε την κάθετο από το Μ προς την ΟΜ, η οποία τέμνει την ε_1 στο Γ και την ε_2 στο Δ. Να δείξετε ότι ΜΓ=ΜΔ.

* * * * *

Β΄ Ομάδα

11.15. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$), με ΑΒ<ΑΓ. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και στην ΔΓ παίρνουμε τμήμα ΔΕ=ΒΔ. Αν Ζ η προβολή του Γ πάνω στην ευθεία ΑΕ, να δείξετε ότι ΑΔ=ΔΖ.

11.16. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο εσωτερικά σημεία Γ, Δ του ημικυκλίου. Να δείξετε ότι οι προβολές των άκρων της χορδής ΓΔ στη διάμετρο και οι προβολές των άκρων της διαμέτρου στην ευθεία της χορδής, ορίζουν τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο.

11.17. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ, το ύψος του ΑΔ και το μέσο Μ της πλευράς του ΒΓ. Ονομάζουμε Ε και Ζ αντίστοιχα τις προβολές των Β και Γ στη διχοτόμο Αx της γωνίας $\hat{A}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΜΖ είναι εγγράψιμο.