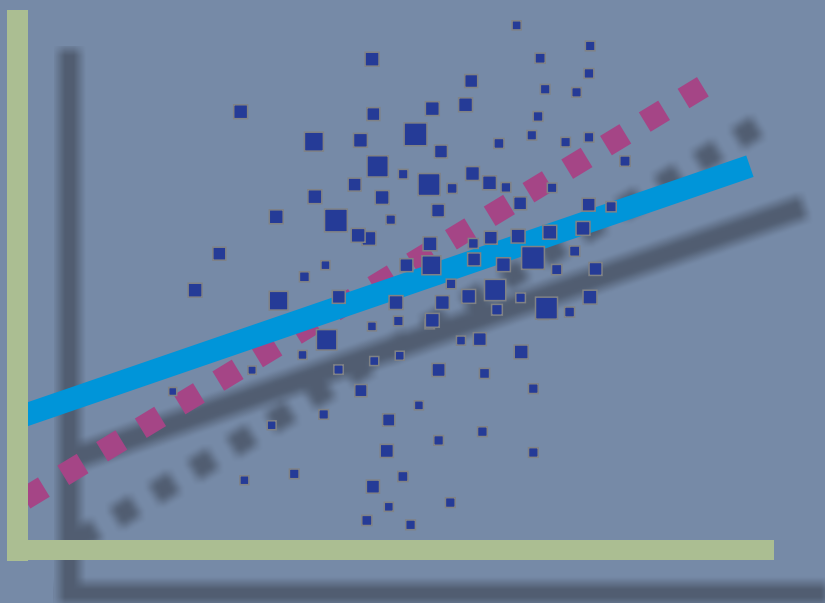


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

θεωρία SOS

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ  
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΚΑΙ  
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ  
ΔΑΜΙΑΝΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ  
ΣΒΕΡΚΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε  
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

### ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:

**Αδαμόπουλος Λεωνίδας**  
**Δαμιανού Χαράλαμπος**  
**Σβέρκος Ανδρέας**

Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου  
Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών  
Σχολικός Σύμβουλος

### ΚΡΙΤΕΣ:

Κουνιάς Στρατής  
Μακρής Κωνσταντίνος  
Τσικαλουνδάκης Γεώργιος

Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών  
Σχολικός Σύμβουλος  
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Γλωσσική Επιμέλεια:

Μπουσούνη Λία  
Καθηγήτρια Β/θμιας Εκπαίδευσης

Δακτυλογράφηση:  
Σχήματα:

Μπολιώτη Πόπη  
Μπούτσικας Μιχάλης

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».



Ευρωπαϊκή Ένωση  
European Union



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
Εκπαίδευση στην Κοινωνία της Γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

---

Το βιβλίο Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Γενικής Παιδείας της Γ' τάξης του Ενιαίου Λυκείου, του οποίου η εφαρμογή αρχίζει από το σχολικό έτος 1999-2000. Απευθύνεται σε όλους τους μαθητές ανεξάρτητα από την κατεύθυνση που ακολουθούν. Γι' αυτό περιορίσαμε σημαντικά στο βιβλίο τους αυστηρούς ορισμούς και τις αποδείξεις και το εμπλουτίσαμε με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα ενδιαφέροντα όλων των μαθητών. Επίσης καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε, να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στο χρόνο που προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα. Το βιβλίο αποτελείται από τρία κεφάλαια.

- Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της παραγώγου. Για τον ορισμό της λαμβάνεται υπόψη η ιστορική πορεία της εξέλιξης της έννοιας. Έτσι, προηγείται το πρόβλημα του καθορισμού της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε ένα σημείο της και του προσδιορισμού της στιγμιαίας ταχύτητας ενός σώματος. Οι βασικές ιδιότητες της παραγώγου σχετικά με τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης παρουσιάζονται εποπτικά με τη βοήθεια κατάλληλων παραδειγμάτων.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται συστηματικότερα τα στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής που γνώρισαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο, τα οποία συμπληρώνονται με μερικές χρήσιμες ιδιότητες της μέσης τιμής και της διασποράς καθώς και με την παλινδρόμηση και τη γραμμική συσχέτιση δύο μεταβλητών. Η παρουσίαση των εννοιών και της μεθοδολογίας της Στατιστικής, όπως άλλωστε επιβάλλεται από τη φύση της, είναι πιο αναλυτική από ό,τι στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία.
- Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στη Θεωρία των Πιθανοτήτων και στις σχετιζόμενες με αυτήν μεθόδους απαρίθμησης. Η απόδειξη των ιδιοτήτων της πιθανότητας ενός ενδεχομένου γίνεται μόνο στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ασχολείται με καταστάσεις όπου υπάρχει αβεβαιότητα, και αυτό την κάνει ιδιαίτερα σημαντική στις εφαρμογές της καθημερινής ζωής.

Τα οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις ή κρίσεις για το βιβλίο από συναδέλφους, από μαθητές και από κάθε πολίτη που ενδιαφέρεται για τα ζητήματα της παιδείας θα είναι ιδιαίτερα ευπρόσδεκτα από τη συγγραφική ομάδα. Παρακαλούμε να αποσταλούν στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 15310 Αγία Παρασκευή.

Μάρτιος 1999



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

Σελίδα

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>: Διαφορικός Λογισμός

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 1.1 Συναρτήσεις             | 9  |
| 1.2 Η Έννοια της Παραγώγου  | 19 |
| 1.3 Παράγωγος Συνάρτησης    | 27 |
| 1.4 Εφαρμογές των Παραγώγων | 39 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>: Στατιστική

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 2.1 Βασικές Έννοιες                  | 58  |
| 2.2 Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων | 62  |
| 2.3 Μέτρα Θέσης και Διασποράς        | 83  |
| 2.4 Γραμμική Παλινδρόμηση            | 104 |
| 2.5 Γραμμική Συσχέτιση               | 117 |

Εως και πίνακα 6  
σελ 15,67

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>: Πιθανότητες

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| 3.1 Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα                | 138 |
| 3.2 Έννοια της Πιθανότητας                        | 146 |
| 3.3 Συνδυαστική                                   | 157 |
| 3.4 Δεσμευμένη Πιθανότητα - Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα | 165 |

## ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

179



# 1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

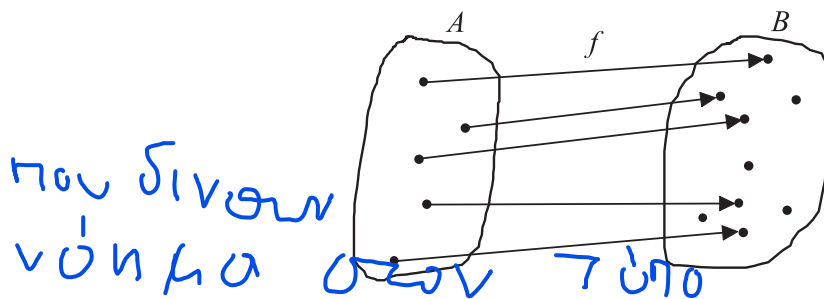
## Εισαγωγή

Στο χώρο της επιστήμης το 17ο αιώνα κυριαρχούσε η μελέτη της κίνησης των ουράνιων σωμάτων, καθώς και η μελέτη της κίνησης ενός σώματος πάνω ή κοντά στη Γη. Στη μελέτη αυτή προφανώς σημαντικό ρόλο έπαιζε ο προσδιορισμός του μέτρου της ταχύτητας και της διεύθυνσης της κίνησης του σώματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν η θέση του σώματος μια χρονική στιγμή  $t$  εκφράζεται με τη συνάρτηση  $x = f(t)$ , τότε ο προσδιορισμός του μέτρου και της διεύθυνσης της ταχύτητάς του τη χρονική στιγμή  $t$  ανάγεται στον προσδιορισμό του ρυθμού μεταβολής της  $x = f(t)$  ως προς  $t$  ή, όπως ονομάστηκε αργότερα, της παραγώγου της  $x = f(t)$ . Έτσι, προβλήματα σχετικά με την κίνηση ενός σώματος, καθώς και άλλα που θα συναντήσουμε αργότερα, οδήγησαν στη γένεση του Διαφορικού Λογισμού. Θεμελιωτές του είναι οι Newton (1642-1727) και Leibniz (1646-1716), οι οποίοι εισήγαγαν τη γενική έννοια της “παραγώγου” και του “διαφορικού”, βελτίωσαν τις μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού και τις χρησιμοποίησαν στην επίλυση προβλημάτων της Γεωμετρίας και της Μηχανικής. Η ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού δε σταμάτησε το 17ο αιώνα, αλλά συνεχίστηκε το 18ο αιώνα με τη σημαντική συμβολή των αδελφών Jacob Bernoulli (1654-1705) και Johann Bernoulli (1667-1748), του Euler (1707-1783), κορυφαίου μαθηματικού της εποχής, του Lagrange (1736-1813) και πολλών άλλων. Τέλος, η αυστηρή θεμελίωση του Διαφορικού Λογισμού έγινε από τους μαθηματικούς του 19ου αιώνα όπως του Bolzano (1781-1848), του Cauchy (1789-1857) και του Weierstrass (1815-1897).

## 1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### Ορισμός Συνάρτησης

Είδαμε σε προηγούμενες τάξεις ότι συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου  $A$  αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου  $B$ .



Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο  $A$ , που λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου  $R$  των πραγματικών αριθμών, ενώ το  $B$  συμπίπτει με το  $R$ . Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς συναρτήσεις. Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα  $f, g, h, \varphi, \sigma$  κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ . Αν με τη συνάρτηση αυτή το  $x \in A$  αντιστοιχίζεται στο  $y \in B$ , τότε γράφουμε

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε “ $y$  ίσον  $f$  του  $x$ ”. Το  $f(x)$  λέγεται τιμή της  $f$  στο  $x$ . Το γράμμα  $x$ , που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του  $A$ , ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το  $y$ , που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο  $x$  και εξαρτάται από την τιμή του  $x$ , λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Σε μια συνάρτηση συνήθως η τιμή της εκφράζεται με έναν αλγεβρικό τύπο, για παράδειγμα  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Σ’ αυτή την περίπτωση λέμε: “η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ” ή “η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ” ή “η συνάρτηση  $y = \sqrt{1-x^2}$ ” ή, απλούστερα, “η συνάρτηση  $\sqrt{1-x^2}$ ”.

Όταν το  $f(x)$  εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το “ευρύτερο” υποσύνολο του  $R$  στο οποίο το  $f(x)$  έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Έτσι, η παραπάνω συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο λύσεων της ανίσωσης  $1-x^2 \geq 0$ , δηλαδή το διάστημα

$\Delta = [-1, 1]$ , η συνάρτηση  $g(x) = \frac{3}{x-2}$  έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο  $A = \mathbf{R} - \{2\}$ ,

δηλαδή το  $\mathbf{R}$  χωρίς το 2, ενώ η συνάρτηση  $h(x) = 3x - 1$  έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το σύνολο  $\mathbf{R}$  των πραγματικών αριθμών.

## ΣΧΟΛΙΟ

Αν και συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα  $f$  για το συμβολισμό μιας συνάρτησης και τα γράμματα  $x$  και  $y$  για το συμβολισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής αντιστοίχως, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

και άλλα γράμματα. Έτσι, για παράδειγμα, οι τύποι  $f(x) = \frac{1}{2}gx^2$  και  $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$  ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

## Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο  $A$ , τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα  $S = f + g$ , με  $S(x) = f(x) + g(x)$ ,  $x \in A$
- Η διαφορά  $D = f - g$ , με  $D(x) = f(x) - g(x)$ ,  $x \in A$
- Το γινόμενο  $P = f \cdot g$ , με  $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ ,  $x \in A$  και
- Το πηλίκο  $R = \frac{f}{g}$ , με  $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , όπου  $x \in A$  και  $g(x) \neq 0$ .

Για παράδειγμα, αν  $f(x) = x^2 - 1$  και  $g(x) = x + 1$ , τότε

$$S(x) = x^2 - 1 + x + 1 = x(x + 1)$$

$$D(x) = x^2 - 1 - x - 1 = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

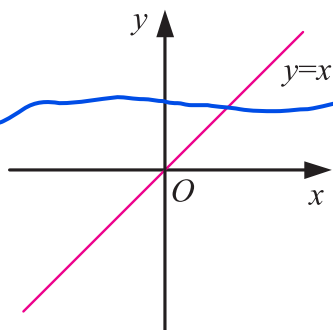
$$P(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x + 1)^2(x - 1)$$

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1, \text{ όπου } x \neq -1.$$

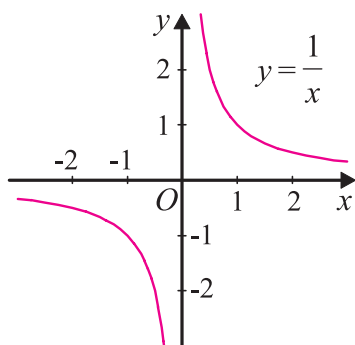
## Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ . Όπως είδαμε σε προηγούμενες τάξεις γραφική παράσταση ή καμπύλη της  $f$  σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Όχι λέγεται το σύνολο των σημείων  $M(x, f(x))$  για όλα τα  $x \in A$ . Επομένως, ένα σημείο  $M(x, y)$  του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της  $f$ , μόνο όταν  $y = f(x)$ . Η εξίσωση λοιπόν  $y = f(x)$  επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη  $(x, y)$  που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$  και λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της  $f$ .

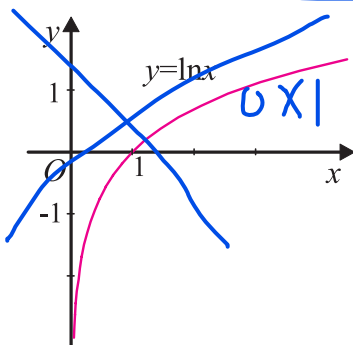
Είναι πολύ χρήσιμο να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων που γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.



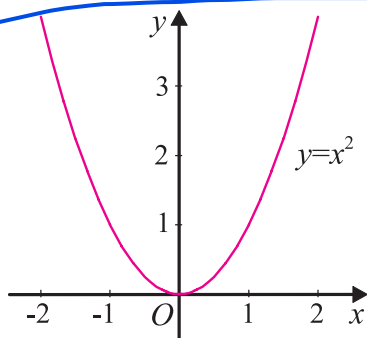
- (α) Η καμπύλη της συνάρτησης  $f(x) = x$  είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



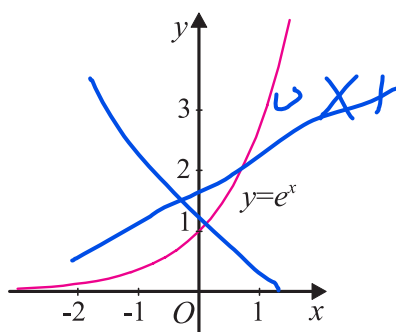
- (γ) Η καμπύλη της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{x}$  είναι μια υπερβολή.



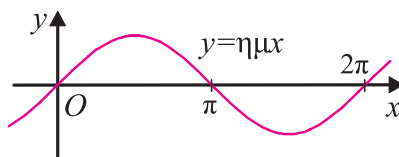
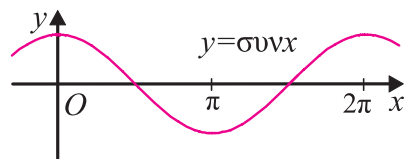
- (ε) Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης  $f(x) = \ln x$  είναι “δεξιά” του άξονα  $yy'$ , αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για  $x > 0$ .



- (β) Η καμπύλη της συνάρτησης  $f(x) = x^2$  είναι μια παραβολή.



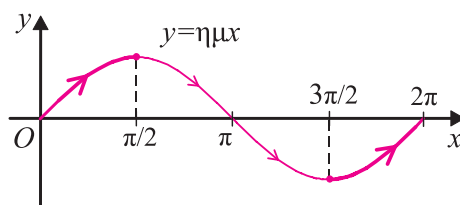
- (δ) Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης  $f(x) = e^x$  είναι “πάνω” από τον άξονα  $x'x$ , αφού  $e^x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ .



- (στ) Οι συναρτήσεις  $f(x) = \eta\mu x$  και  $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$  είναι περιοδικές με περίοδο  $2\pi$ .

Παρατηρούμε ότι στη γραφική παράσταση της  $f(x) = \frac{1}{x}$  υπάρχει μια διακοπή στο σημείο  $x = 0$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πεδίο ορισμού της  $f$  δεν περιέχει το μηδέν.

## Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης



3

- Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  προκύπτει αμέσως ότι για δύο οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2$  του διαστήματος  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  με  $x_1 < x_2$  είναι  $\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$ . Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Το ίδιο συμβαίνει και στο διάστημα  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ . Όμως για δύο οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2$  του διαστήματος  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  με  $x_1 < x_2$ , παρατηρούμε ότι  $\eta\mu x_1 > \eta\mu x_2$ .

Λέμε σ' αυτή την περίπτωση ότι η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ . Γενικά:

Σημείωση \* προσοχή !!!

Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ , και **γνησίως φθίνουσα** στο  $\Delta$ , όταν για οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

- Ακόμη, για την παραπάνω συνάρτηση παρατηρούμε ότι για κάθε

$x \in [0, 2\pi]$  είναι  $\eta\mu x \leq 1 = \eta\mu \frac{\pi}{2}$  και  $\eta\mu x \geq -1 = \eta\mu \frac{3\pi}{2}$ . Δηλαδή, όπως λέμε, η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  έχει ολικό μέγιστο (maximum) για  $x = \frac{\pi}{2}$  και ολικό ελάχιστο (minimum) για  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  του σχήματος 4 προκύπτει ότι για  $x = x_1$  η τιμή της  $g$  είναι μικρότερη από τις τιμές της  $g$  σε όλα τα  $x$  που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το  $x_1$ , ή, όπως λέμε σε μια περιοχή του  $x_1$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει στο σημείο  $x_1$  τοπικό ελάχιστο. Το ίδιο συμβαίνει και για  $x = x_3$ .

Οι τιμές  $g(x_1)$  και  $g(x_3)$  λέγονται τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης. Επίσης, για  $x = x_4$  η τιμή  $g(x_4)$  είναι μεγαλύτερη από τις τιμές της  $g$  σε όλα τα  $x$  που ανήκουν σε μια περιοχή του  $x_4$ . Λέμε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει στο σημείο  $x_4$  τοπικό μέγιστο. Το ίδιο συμβαίνει και για  $x = x_2$ . Οι τιμές  $g(x_2)$  και  $g(x_4)$  λέγονται τοπικά μέγιστα της συνάρτησης. Παρατηρούμε ότι ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο. Για παράδειγμα, το τοπικό ελάχιστο  $g(x_1)$  είναι μεγαλύτερο από το τοπικό μέγιστο  $g(x_4)$ .

Γενικά:

για μια περιοχή ή σε  $x_1$

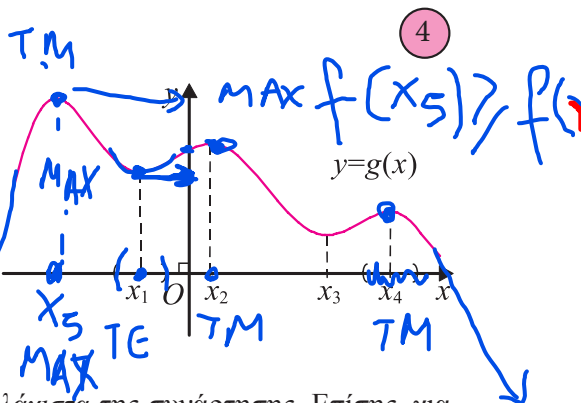
Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει:

**Τοπικό μέγιστο** στο  $x_1 \in A$ , όταν  $f(x) \leq f(x_1)$  για κάθε  $x$  σε μια περιοχή του  $x_1$  και **τοπικό ελάχιστο** στο  $x_2 \in A$ , όταν  $f(x) \geq f(x_2)$  για κάθε  $x$  σε μια περιοχή του  $x_2$ .

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται ακρότατα της συνάρτησης.

$\forall x \in A$   
Όριο Συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ , η οποία δεν ορίζεται για  $x = 1$ . Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της  $f$  για τιμές του  $x$  κοντά στο 1.



Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του  $f(x)$  για τιμές του  $x$  κοντά στο 1.

| $x < 1$ | $f(x)$   | $x > 1$ | $f(x)$   |
|---------|----------|---------|----------|
| 0,5     | 1,500000 | 1,5     | 2,500000 |
| 0,9     | 1,900000 | 1,1     | 2,100000 |
| 0,99    | 1,990000 | 1,01    | 2,010000 |
| 0,999   | 1,999000 | 1,001   | 2,001000 |
| 0,9999  | 1,999900 | 1,0001  | 2,000100 |

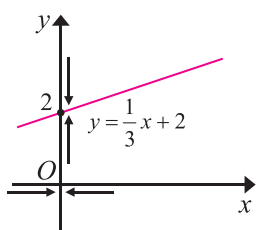
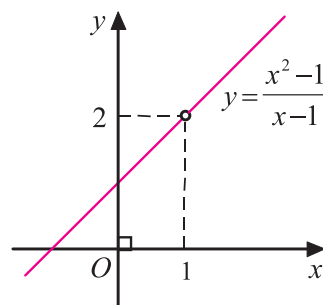
Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι όταν το  $x$  παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 (και από τις δύο πλευρές του 1), το  $f(x)$  παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2. Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε, αν παρατηρήσουμε ότι για  $x \neq 1$  είναι

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,$$

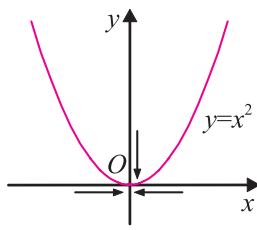
5

οπότε όταν το  $x$  παίρνει τιμές που τείνουν στο 1 ( $x \rightarrow 1$ ), τότε το  $f(x) = x+1$  παίρνει τιμές που τείνουν στο 2 ( $x+1 \rightarrow 2$ ). Λέμε λοιπόν ότι η  $f$  έχει στο σημείο 1 όριο (limit) 2 και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ .

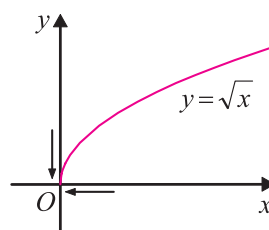
Με το προηγούμενο παράδειγμα παρουσιάσαμε με απλό τρόπο και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο  $x_0$ , που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, υπάρχουν όμως σημεία του πεδίου ορισμού της πολύ κοντά στο  $x_0$ . Τίποτα βέβαια δεν αποκλείει την αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης και σε ένα σημείο  $x_0$  που να ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ , που είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι όταν  $x \rightarrow 0$ , το  $f(x) \rightarrow 2$ , δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ . Ομοίως,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ .



(α)



(β)



(γ)

6

Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  έχουν στο  $x_0$  όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$  όπου  $\ell_1$  και  $\ell_2$  πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k\ell_1$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell_1^v$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{\ell_1}$ .

Έτσι, για παράδειγμα, για την πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 3x - 9$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 9) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 9 = 4 + 6 - 9 = 1.$$

Παρατηρούμε ότι για τη συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 3x - 9$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .

Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$ .

Γενικά μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής, αν για κάθε  $x_0 \in A$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι ισχύει για παράδειγμα  $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon\phi x = \epsilon\phi x_0 \text{ (όταν } \sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0 \text{)}.$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστούν τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+5}{4x}$     ii)  $\lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})$     iii)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3}$ .

$f$  συνεχής  $f(5) = \frac{20}{20} = 1$

**ΛΥΣΗ**

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+5}{4x} = \frac{3 \cdot 5 + 5}{4 \cdot 5} = \frac{20}{20} = 1$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) = \sqrt{8-4} + \sqrt{8+1} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -6.$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

1. Αν  $f(x) = x^3 - 3x$ , να υπολογίσετε τις τιμές  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(-1)$ .
2. Αν  $\varphi(t) = t^2 - 5t + 6$ , να υπολογίσετε τις τιμές  $\varphi(0)$  και  $\varphi(1)$ . Για ποιες τιμές του  $t$  είναι  $\varphi(t) = 0$ ;
3. Αν  $h(\theta) = \sin \theta - \eta \mu \theta$ , να υπολογίσετε τις τιμές  $h(0)$  και  $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Για ποιες τιμές της γωνίας  $\theta \in [0, 2\pi]$  είναι  $h(\theta) = 0$ ;
4. Αν  $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$ , να υπολογίσετε τις τιμές  $f(1)$  και  $f(e)$ .
5. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \frac{2x}{(x-1)(x-2)}$ ;
6. Για ποιες τιμές του  $x$  είναι αρνητική η συνάρτηση  $f(x) = (x-3)(x-7)$ ;  
Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $\sigma(x) = \sqrt{(x-3)(x-7)}$ ;
7. Αν  $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$  και  $g(x) = 2x - 1$ , να βρείτε τις συναρτήσεις  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

8. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 4) & \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -2} [(2x - 1)(x + 4)] & \text{iii)} \lim_{x \rightarrow 4} \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ \text{iv)} \lim_{x \rightarrow 0} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) & \text{v)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (3\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x). \end{array}$$

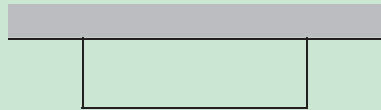
9. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3(x - 2)} & \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2}{x^2 + 1} & \text{iii)} \lim_{x \rightarrow 0} [(x + 1)\sigma\upsilon\nu x] \\ \text{iv)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{v)} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5} & \text{vi)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}. \end{array}$$

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ , να δείξετε ότι  $f(x) + f(-x) = 1$ .

2. Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 100 m, μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι  $x$ , να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του  $x$ .



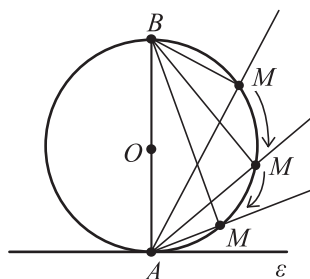
3. Ένα κυλινδρικό φλυτζάνι, ανοικτό από πάνω, κατασκευάζεται έτσι ώστε το ύψος του και το μήκος της βάσης του να έχουν άθροισμα 20 cm. Αν το φλυτζάνι έχει ύψος  $h$  cm, να εκφράσετε τον όγκο του ως συνάρτηση του  $h$ . Αν η ακτίνα της βάσης του είναι  $r$ , να εκφράσετε το εμβαδόν της επιφάνειάς του ως συνάρτηση του  $r$ .
4. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $AB = A\Gamma = 10$ . Αν  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \theta$ , να εκφράσετε το ύψος  $v$  του τριγώνου από την κορυφή  $B$ , καθώς και το εμβαδόν του ως συνάρτηση του  $\theta$ .
5. Να δείξετε ότι

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \quad \text{ii)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{1}{2}.$$

## 1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

### Εφαπτομένη Καμπύλης

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου  $(O, R)$  σε ένα σημείο του  $A$  είναι η ευθεία  $\varepsilon$  που είναι κάθετη στην ακτίνα  $OA$  στο σημείο  $A$ . Έστω  $M$  ένα άλλο σημείο του κύκλου. Επειδή το τρίγωνο  $MAB$  είναι ορθογώνιο στο  $M$ , το άθροισμα των γωνιών του  $A$  και  $B$  είναι  $90^\circ$ . Αν υποθέσουμε ότι το  $M$  κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει το  $A$ , η γωνία  $B$  τείνει να γίνει μηδενική, οπότε η γωνία  $A$  τείνει να γίνει ορθή. Δηλαδή η τέμνουσα  $AM$  τείνει να γίνει κάθετη στην  $OA$  που σημαίνει ότι τείνει να συμπίπτει με την εφαπτομένη  $\varepsilon$ . Θα μπορούσαμε επομένως να ορίσουμε ως εφαπτομένη του κύκλου  $(O, R)$  στο σημείο  $A$ , την οριακή θέση της τέμνουσας  $AM$ , καθώς το  $M$  κινούμενο πάνω στον κύκλο τείνει να συμπίπτει με το  $A$ .



Τον ισοδύναμο αυτό ορισμό της εφαπτομένης ενός κύκλου θα τον χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της.

Έστω λοιπόν  $f$  μια συνάρτηση και  $A(x_0, f(x_0))$  ένα σημείο της γραφικής της παράστασης  $C$ .

Παίρνουμε και ένα άλλο σημείο  $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$  της  $C$  με  $h \neq 0$ .

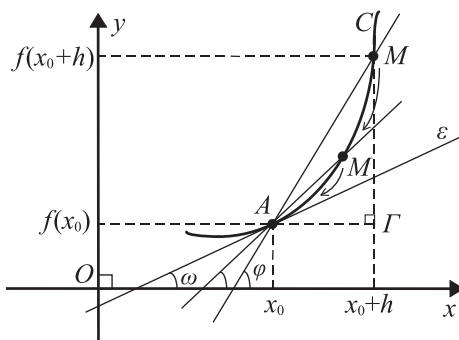
Παρατηρούμε ότι καθώς το  $M$  κινούμενο πάνω στη  $C$  πλησιάζει το  $A$ , όταν δηλαδή  $h \rightarrow 0$ , τότε η ευθεία  $AM$  φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση  $\varepsilon$  η οποία λέγεται εφαπτομένη (tangent) της  $C$  στο  $A$ . Από το σχήμα έχουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της  $AM$  είναι

$$\varepsilon\phi\varphi = \frac{M\Gamma}{A\Gamma} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

$A(x_0, f(x_0))$

οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της  $C$  στο  $A$  θα είναι

$$\leftarrow \chi\acute{\iota}\sigma\eta \quad \varepsilon\phi\omega = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$



## Στιγμιαία Ταχύτητα

Όπως έχει διαπιστωθεί πειραματικά από τον Γαλιλαίο πριν από τέσσερις αιώνες, το διάστημα  $S$  που διανύεται σε χρόνο  $t$  sec (s) από ένα σώμα που αφήνεται να πέσει στο κενό εκφράζεται από τον τύπο

$$S(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

όπου  $g \cong 9,81 \text{ m/s}^2$  είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας. Ποια όμως θα είναι η ταχύτητα ενός σώματος που πέφτει ελεύθερα σε ένα οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς του, για παράδειγμα όταν  $t = 5 \text{ s}$ ;

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το ζητούμενο μέγεθος υπολογίζοντας τη μέση ταχύτητα σε ένα μικρό χρονικό διάστημα για παράδειγμα του ενός δεκάτου του δευτερολέπτου, από  $t = 5 \text{ s}$  στο  $t = 5,1 \text{ s}$ . Έχουμε:

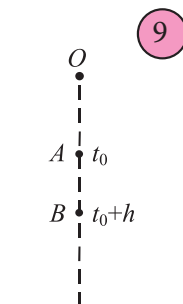
$$\begin{aligned} \text{Μέση ταχύτητα} &= \frac{\text{διανυθέν διάστημα}}{\text{χρόνος}} = \frac{S(5,1) - S(5)}{0,1} \\ &= \frac{4,905(5,1)^2 - 4,905 \cdot 5^2}{0,1} = 49,5405 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει τα αποτελέσματα όμοιων υπολογισμών της μέσης ταχύτητας για ολοένα και μικρότερα χρονικά διαστήματα.

| Χρονικό διάστημα        | Μέση ταχύτητα |
|-------------------------|---------------|
| $5 \leq t \leq 6$       | 53,955        |
| $5 \leq t \leq 5,1$     | 49,5405       |
| $5 \leq t \leq 5,05$    | 49,29525      |
| $5 \leq t \leq 5,01$    | 49,09905      |
| $5 \leq t \leq 5,001$   | 49,054905     |
| $5 \leq t \leq 5,0001$  | 49,050491     |
| $5 \leq t \leq 5,00001$ | 49,050049     |

Φαίνεται ότι καθώς μικραίνει το χρονικό διάστημα, η μέση ταχύτητα πλησιάζει ολοένα και περισσότερο στην τιμή  $49,05 \text{ m/s}$ . Η οριακή αυτή τιμή των μέσων ταχυτήτων σε ολοένα και μικρότερα χρονικά διαστήματα με ένα άκρο το  $t = 5$  ορίζεται ως η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος όταν  $t = 5 \text{ s}$ . Έτσι η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος ύστερα από χρόνο  $5 \text{ s}$  θα είναι  $v = 49,05 \text{ m/s}$ .

Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι το σώμα ύστερα από  $t_0$  βρίσκεται στο σημείο  $A$  και ας εξετάσουμε πόσο αυξάνεται το διανυ-



όμενο διάστημα, όταν ο χρόνος αυξηθεί κατά  $h$ . Το κινητό διανύει σε χρόνο  $t_0$  διάστημα

$$S_1 = OA = S(t_0) = \frac{1}{2} g t_0^2$$

και σε χρόνο  $t_0 + h$  διάστημα

$$S_2 = OB = S(t_0 + h) = \frac{1}{2} g (t_0 + h)^2 = \frac{1}{2} g t_0^2 + \frac{1}{2} g (2t_0 h + h^2).$$

Άρα, η αύξηση του διαστήματος σε χρόνο  $h$  είναι

$$\Delta S = S_2 - S_1 = AB = \frac{1}{2} g (2t_0 h + h^2)$$

και η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα από  $t_0$  σε  $t_0 + h$  θα είναι

$$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} g (2t_0 \cdot h + h^2)}{(t_0 + h) - t_0} = g t_0 + \frac{1}{2} g h.$$

Καθώς όμως ελαττώνεται το  $h$  πλησιάζοντας το μηδέν, χωρίς ποτέ να γίνεται ίσο με το μηδέν, η μέση ταχύτητα θα πλησιάζει όλο και περισσότερο στο  $g t_0$ . Την οριακή αυτή τιμή τη λέμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού στη χρονική στιγμή  $t_0$  ή απλώς ταχύτητα του κινητού στο  $t_0$ .

στιγμιαία  
Επομένως, η ταχύτητα  $v$  του κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$  θα είναι

$$v = S'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{h} = g t_0.$$

Προφανώς όταν  $t_0 = 5$ , τότε  $v = 9,81 \cdot 5 = 49,05$  m/s, τιμή την οποία προσεγγίσαμε και προηγουμένως με αριθμητικούς υπολογισμούς.

Την ίδια πορεία μπορούμε να ακολουθήσουμε και για τον υπολογισμό της ταχύτητας ενός κινητού το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, στη γενικότερη περίπτωση που η τετμημένη του ή, όπως λέμε στη Φυσική, η θέση του τη χρονική στιγμή  $t$  εκφράζεται από τη συνάρτηση  $x = f(t)$ .



Για να βρούμε την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$ , θεωρούμε το χρονικό διάστημα από  $t_0$  έως  $t_0 + h$  με  $h \neq 0$ . Το κινητό σε χρόνο  $h$  μετατοπίζεται κατά  $\Delta x = x_2 - x_1 = f(t_0 + h) - f(t_0)$ . Επομένως, η μέση

ταχύτητα του κινητού στη διάρκεια του χρονικού διαστήματος  $h$  θα είναι

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Αν σκεφτούμε όπως στην προηγούμενη ειδική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$  θα είναι

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Δηλαδή θα είναι το όριο του λόγου της μεταβολής της τετμημένης του κινητού προς την αύξηση του χρόνου, καθώς η τελευταία τείνει προς το μηδέν χωρίς στην πραγματικότητα να γίνεται ίση με το μηδέν.

### Παράγωγος της $f$ στο $x = x_0$

Και τα δύο προηγούμενα προβλήματα, μολονότι αναφέρονται σε διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους, το πρώτο στη Γεωμετρία και το δεύτερο στη Μηχανική, οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Υπάρχουν όμως και πολλά άλλα προβλήματα διαφορετικής φύσεως, όπως, για παράδειγμα, είναι ο ορισμός της έντασης ενός ρεύματος, της ταχύτητας μιας χημικής αντίδρασης, του οριακού κόστους στην Οικονομία, τα οποία οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της ίδιας μορφής.

Αν το προηγούμενο όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$ , συμβολίζεται με  $f'(x_0)$  και διαβάζεται “ $f$  τονούμενο του  $x_0$ ”. Έχουμε λοιπόν:

*εξίσωση της (f στο  $x_0$ ,  $f(x_0)$ )* *Ρυθμός μεταβολής*

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*Συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης*

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης  $f(x) = 3x^2$  στο σημείο 4, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά  $f(4 + h) - f(4)$ :

$$\begin{aligned} f(4 + h) - f(4) &= 3(4 + h)^2 - 3 \cdot 4^2 \\ &= 3(4^2 + 8h + h^2 - 4^2) \\ &= 3h(8 + h) \end{aligned}$$

- Για  $h \neq 0$  βρίσκουμε το πηλίκο  $\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ :

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{3h(8+h)}{h} = 24 + 3h.$$

- Υπολογίζουμε το όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (24 + 3h) = 24.$$

Άρα,  $f'(4) = 24$ .

Η παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  εκφράζει το ρυθμό μεταβολής (rate of change) του  $y = f(x)$  ως προς το  $x$ , όταν  $x = x_0$ . Έτσι, σύμφωνα με όσα εκθέσαμε στην προηγούμενη παράγραφο:

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$  θα είναι  $f'(x_0)$ , δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της  $f(x)$  ως προς  $x$  όταν  $x = x_0$ .
- Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση  $x = f(t)$  θα είναι τη χρονική στιγμή  $t_0$

$$v(t_0) = f'(t_0),$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της  $f(t)$  ως προς  $t$  όταν  $t = t_0$ .

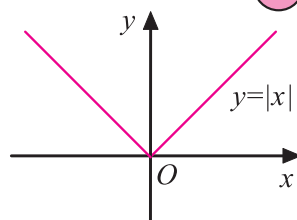
### ΣΧΟΛΙΟ

Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο. Όπως είναι, για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = |x|$  στο  $x_0 = 0$ . Διότι όταν  $h < 0$ , έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1,$$

ενώ όταν  $h > 0$ , έχουμε  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$ , που σημαίνει ότι δεν

υπάρχει το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ .



1

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται με τη συνάρτηση  $x(t) = t^2 + t$ , όπου το  $t$  μετριέται σε δευτερόλεπτα.

α) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

i)  $[0,2]$  ii)  $[0,1]$  iii)  $[0, 0,5]$  iv)  $[0, 0,1]$ .

β) Να βρεθεί η ταχύτητα όταν  $t = 0$ .

γ) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $x = x(t)$ .

δ) Να σχεδιαστούν οι τέμνουσες από το  $O(0,0)$  της γραφική παράστασης με συντελεστή διεύθυνσης τις μέσες ταχύτητες του ερωτήματος (α).

Επίσης, να βρεθεί και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης  $x = x(t)$  στο σημείο της με  $t = 0$ .

## ΛΥΣΗ

α) Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας έχουμε

$$\text{i) } \bar{v} = \frac{x(2) - x(0)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m/s} \quad \text{ii) } \bar{v} = \frac{x(1) - x(0)}{1} = \frac{2}{1} = 2 \text{ m/s}$$

$$\text{iii) } \bar{v} = \frac{x(0,5) - x(0)}{0,5} = 1,5 \text{ m/s} \quad \text{iv) } \bar{v} = \frac{x(0,1) - x(0)}{0,1} = 1,1 \text{ m/s}$$

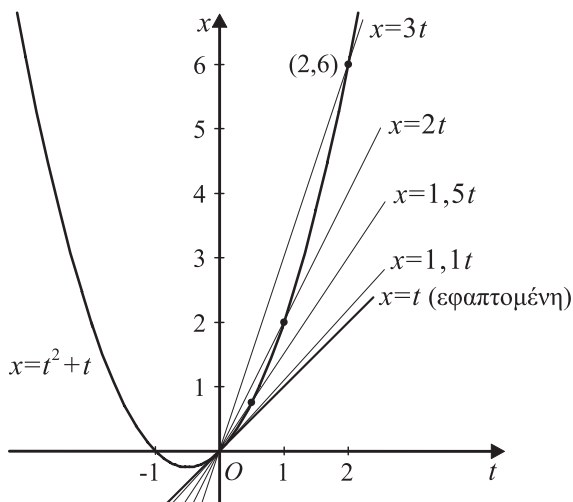
β) Η ταχύτητα  $v$  όταν  $t = 0$ , είναι

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(0+h) - x(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+1) = 1 \text{ m/s}.$$

γ) Αν σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ο οριζόντιος άξονας παριστάνει το χρόνο  $t$  και ο κατακόρυφος άξονας το  $x(t)$ , τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$x(t) = t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$  είναι, σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από την Α' Λυ-

κείου, μια παραβολή με κορυφή το σημείο  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$  και άξονα συμμετρίας την ευθεία  $t = -\frac{1}{2}$ . Έτσι, έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση.



δ) Επειδή οι τέμνουσες διέρχονται από το σημείο  $O(0,0)$  και έχουν συντελεστές διεύθυνσης 3, 2, 1,5 και 1,1, οι εξισώσεις τους είναι  $x = 3t$ ,  $x = 2t$ ,  $x = 1,5t$  και  $x = 1,1t$  αντιστοίχως. Οι ευθείες αυτές έχουν σχεδιαστεί στο παραπάνω σχήμα.

Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της με  $t = 0$  θα έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με τη στιγμιαία ταχύτητα όταν  $t = 0$ , δηλαδή ίσο με 1. Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται και από την αρχή των αξόνων, η εξίσωσή της είναι  $x = t$ , δηλαδή είναι η διχοτόμος της γωνίας των θετικών ημιαξόνων.

**Συς 2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3}{x}$ .

i) Να βρεθεί η  $f'(3)$ .

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της  $f$  στο σημείο της  $(3, f(3))$  και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη αυτή.

**ΛΥΣΗ**

i) Έχουμε  $f(3+h) - f(3) = \frac{3}{3+h} - \frac{3}{3} = \frac{3-3-h}{3+h} = -\frac{h}{3+h}$  και για  $h \neq 0$

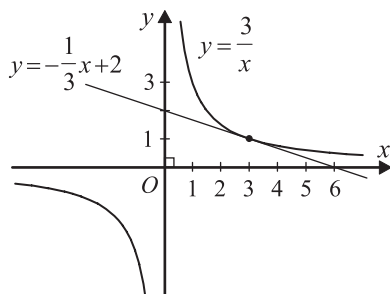
$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{-\frac{h}{3+h}}{h} = \frac{-h}{h(3+h)} = -\frac{1}{3+h}.$$

Επομένως

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{3+h} \right) = -\frac{1}{3}.$$

- ii) Η εφαπτομένη της καμπύλης της  $f$  στο σημείο της με  $x = 3$  έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με  $f'(3)$ . Επομένως, η εξίσωσή της είναι

$$y = -\frac{1}{3}x + \beta.$$



Επειδή όμως το σημείο  $(3, f(3)) = (3, 1)$  ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε

$$1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + \beta$$

$$1 = -1 + \beta$$

$$\beta = 2.$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι  $y = -\frac{1}{3}x + 2$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

i)  $f(x) = 3x + 1$  στο  $x = 3$

ii)  $g(x) = x^2 + 5$  στο  $x = -2$

iii)  $\sigma(x) = x^2 + 2x$  στο  $x = 4$

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f(t) = \frac{1}{t+1}$  στο  $t = 1$ .

3. i) Το μήκος  $L$  ενός κύκλου ακτίνας  $r$  είναι  $L = 2\pi r$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του  $L$  ως προς  $r$ , όταν  $r = 3$ .

ii) Το εμβαδόν  $E$  ενός κύκλου ακτίνας  $r$  είναι  $E = \pi r^2$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του  $E$  ως προς  $r$ , όταν  $r = 2$ .

4. i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E$  ενός τετραγώνου πλευράς  $x$  ως προς  $x$  όταν  $x = 5$ .  
 ii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός κύβου πλευράς  $x$  ως προς  $x$ , όταν  $x = 10$ .
5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:
- i)  $f(x) = x^2$  στο  $A(3, f(3))$   
 ii)  $f(x) = 2\sqrt{x}$  στο  $A(4, f(4))$ .

## 1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### Ορισμός Παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ , και  $B$  το σύνολο των  $x \in A$  στα οποία η  $f$  είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε  $x \in B$  αντιστοιχίζεται στο  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος** (derivative) της  $f$  και συμβολίζεται με  $f'$ . Για παράδειγμα, αν  $f(x) = 3x^2$ , τότε έχουμε:

$$f(x+h) - f(x) = 3(x+h)^2 - 3x^2 = 3(x^2 + 2xh + h^2 - x^2) = 3h(2x+h),$$

και για  $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3h(2x+h)}{h} = 6x + 3h.$$

Επομένως,  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x$ .

Έτσι, η παράγωγος μιας συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$  είναι ίση με την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Για παράδειγμα, η παράγωγος της  $f(x) = 3x^2$  στο  $x_0 = 4$  είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης  $f'(x) = 6x$  στο  $x_0 = 4$ , δηλαδή  $f'(4) = 6 \cdot 4 = 24$ .

Η παράγωγος της συνάρτησης  $f$  λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της  $f$  και συμβολίζεται με  $f''$ .

Σύμφωνα με τα προηγούμενα αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι  $x(t)$  τη χρονική στιγμή  $t$ , τότε η ταχύτητά του θα είναι

$$v(t) = x'(t).$$

Αν η συνάρτηση  $v$  είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή  $t$  θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει

$$a(t) = v'(t) \text{ ή ισοδύναμα } a(t) = x''(t).$$

## Παραγωγή Βασικών Συναρτήσεων

Έως τώρα η παραγωγή μιας συνάρτησης  $f$  γινόταν με τη βοήθεια του τύπου

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε μερικούς κανόνες που διευκολύνουν τον υπολογισμό της παραγώγου πιο πολύπλοκων συναρτήσεων.

### • Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$

12

Έχουμε

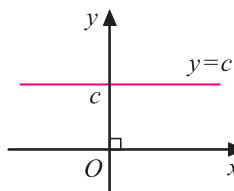
$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

και για  $h \neq 0$ ,

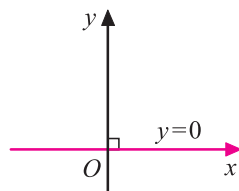
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

$$\text{οπότε } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

$$\text{Άρα } (c)' = 0.$$



(α)



(β)

### • Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$

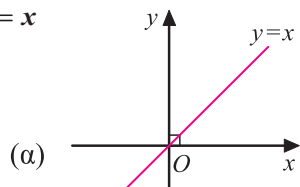
13

Έχουμε  $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$ , και για  $h \neq 0$ ,

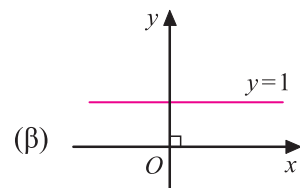
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

$$\text{Επομένως } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$$\text{Άρα } (x)' = 1.$$



(α)



(β)

### • Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^p$

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2$ . Έχουμε

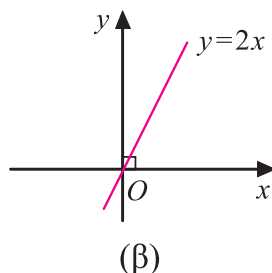
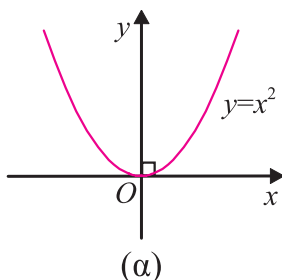
$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h,$$

και για  $h \neq 0$ ,  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x+h$ .

Επομένως,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$ .

Άρα  $(x^2)' = 2x$

14



Αποδεικνύεται ότι

$(x^v)' = vx^{v-1}$ , όπου  $v$  φυσικός.

Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός.

Για παράδειγμα

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$ ,

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ ,

$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

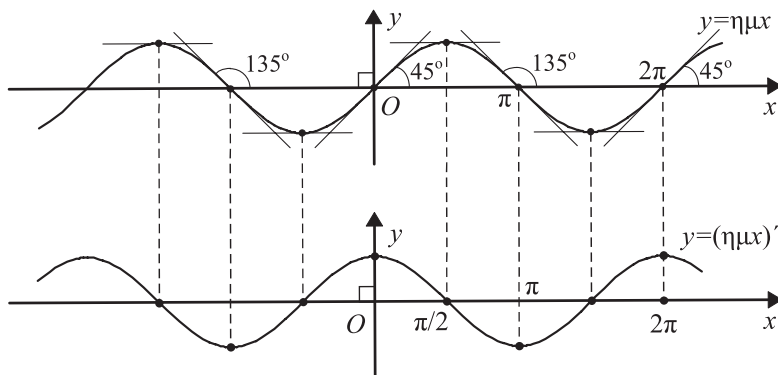
Άρα

$(x^p)' = px^{p-1}$ , όπου  $p$  ρητός αριθμός.

### • Η παράγωγος του ημx και του συνx.

Έστω η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$  (σχήμα 15). Αν λάβουμε υπόψη ότι η τιμή της  $f'(x)$  σε ένα σημείο  $x = x_0$  είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της  $f$  στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$ , μπορούμε να σχεδιάσουμε προσεγγιστικά τη γραφική παράσταση της  $f'$ .

Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της  $f'$  μοιάζει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\sigma\upsilon\eta x$ .



Πράγματι, για τη συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  αποδεικνύεται ότι  
 $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ .

Επίσης για τη συνάρτηση  $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$  αποδεικνύεται ότι  
 $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ .

### • Η παράγωγος του $e^x$ και του $\ln x$

Για την εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση, με βάση τον αριθμό  $e$ , αποδεικνύεται ότι

$$(e^x)' = e^x \text{ και } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

## Κανόνες Παραγώγισης

### • Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$

Έστω η συνάρτηση  $F(x) = cf(x)$ . Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x)), \text{ και για } h \neq 0$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = cf'(x).$$

Άρα  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ .

Για παράδειγμα  $(3x^5)' = 3(x^5)' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$ ,

$$\left(\frac{4}{x}\right)' = 4\left(\frac{1}{x}\right)' = 4\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-4}{x^2}$$

και  $(6 \ln x)' = 6(\ln x)' = 6 \frac{1}{x} = \frac{6}{x}$ .

### • Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$

Έστω η συνάρτηση  $F(x) = f(x) + g(x)$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) \\ &= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)), \end{aligned}$$

και για  $h \neq 0$ ,  $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ .

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Άρα  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Για παράδειγμα  $(x^4 + 3x)' = (x^4)' + (3x)' = 4x^3 + 3$

και  $\left(x^2 - x + \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' - (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - 1 - \frac{1}{x^2}$ .

### • Παράγωγος των συναρτήσεων $f(x) \cdot g(x)$ και $\frac{f(x)}{g(x)}$

Για το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγωγίσης:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Για παράδειγμα

$$(x \cdot \eta\mu x)' = (x)' \eta\mu x + x(\eta\mu x)' = \eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

και

$$\left(\frac{x+1}{x^2}\right)' = \frac{(x+1)'x^2 - (x+1) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-(x+2)}{x^3}.$$

### • Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Γνωρίζουμε ήδη πώς παραγωγίζονται οι συναρτήσεις  $x^v$ ,  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $e^x$  και  $\ln x$ . Επίσης, με τη βοήθεια των κανόνων παραγωγίσης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου μπορούμε να παραγωγίσουμε και πολύπλοκότερες συναρτήσεις όπως για παράδειγμα τις  $(x^3 + 1)^2$  και  $(x^3 + 1)^3$  για τις οποίες έχουμε

$$((x^3 + 1)^2)' = ((x^3 + 1)(x^3 + 1))' = 3x^2(x^3 + 1) + 3x^2(x^3 + 1) = 6x^2(x^3 + 1) \text{ και}$$

$$((x^3 + 1)^3)' = [(x^3 + 1)^2(x^3 + 1)]' = 6x^2(x^3 + 1)(x^3 + 1) + (x^3 + 1)^2 \cdot 3x^2 = 9x^2(x^3 + 1)^2$$

Πώς όμως θα παραγωγίσουμε μια συνάρτηση όπως η  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ;

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $F(x)$  προκύπτει αν στην  $f(x) = \sqrt{x}$  θέσουμε όπου  $x$  το  $g(x) = x^2 + 1$ . Είναι, δηλαδή,  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} = f(g(x))$ . Γι' αυτό η συνάρτηση

$F$  λέγεται **σύνθεση** της  $g$  με την  $f$ .

Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση  $f(g(x))$ , σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την  $f$  σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την  $g(x)$  και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της  $g$ .

Επομένως,

$$((x^3 + 1)^3)' = 3(x^3 + 1)^2(x^3 + 1)' = 3(x^3 + 1)^2 \cdot 3x^2 = 9x^2(x^3 + 1)^2.$$

Επίσης, επειδή όπως είδαμε, είναι  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , έχουμε:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ομοίως,  $(\eta\mu(2x+1))' = \sigma\upsilon\nu(2x+1) \cdot (2x+1)' = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu(2x+1).$

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι βασικοί τύποι και κανόνες παραγώγισης.

|                                       |                                                                            |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $(c)' = 0$                            | $(cf(x))' = c f'(x)$                                                       |
| $(x)' = 1$                            | $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$                                           |
| $(x^p)' = \rho x^{\rho-1}$            | $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$                                      |
| $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   | $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ |
| $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$  | $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$                                        |
| $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ |                                                                            |
| $(e^x)' = e^x$                        |                                                                            |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$              |                                                                            |

505

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2 x} \quad | \quad (\sigma\phi x)' = \frac{-1}{\eta\mu^2 x} = \frac{-1}{-1-\varepsilon\phi^2 x}$$

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων

i)  $f(x) = \varepsilon\phi x$     ii)  $f(x) = \eta\mu^2 3x$ .

**ΛΥΣΗ**

i) Έχουμε

$$f'(x) = (\varepsilon\phi x)'$$

$$= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Άρα

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ii) Έχουμε

$$f'(x) = [(\eta\mu 3x)^2]' = 2 \cdot \eta\mu 3x \cdot (\eta\mu 3x)' = 2 \cdot \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x \cdot (3x)' \\ = 3 \cdot 2\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x = 3 \cdot \eta\mu(2 \cdot 3x) = 3\eta\mu 6x,$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση  $\eta\mu 2a = 2\eta\mu a \sigma\upsilon\nu a$ .

Σος

**2.** Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο  $x = x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ , όπου το  $t$  μετριέται σε δευτερόλεπτα και το  $x$  σε μέτρα.

- i) Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο  $t$ .
- ii) Ποια είναι η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 2 s και ποια σε χρόνο 4 s;
- iii) Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
- iv) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
- v) Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5 s.

### ΛΥΣΗ

- i) Η ταχύτητα είναι

$$v(t) = x'(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t)' = 3t^2 - 12t + 9.$$

- ii) Η ταχύτητα του σημείου

σε χρόνο  $t = 2s$  είναι

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 \text{ m/s}$$

και σε χρόνο  $t = 4s$  είναι

$$v(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 \text{ m/s}.$$

- iii) Το σημείο είναι ακίνητο, όταν  $v(t) = 0$ , δηλαδή όταν

$$3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = 1 \text{ ή } t = 3.$$

Άρα, το σημείο είναι ακίνητο ύστερα από 1 s και ύστερα από 3 s.

- iv) Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση, όταν  $v(t) > 0$ , δηλαδή όταν

$$3t^2 - 12t + 9 > 0$$

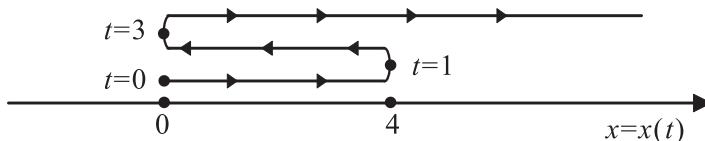
$$t^2 - 4t + 3 > 0$$

$$(t - 1)(t - 3) > 0$$

$$t < 1 \text{ ή } t > 3.$$

Άρα, το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση στα χρονικά διαστήματα  $t < 1$  και  $t > 3$  (και στην αρνητική κατεύθυνση όταν  $1 < t < 3$ ).

Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



ν) Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι:

- Στη διάρκεια του πρώτου δευτερόλεπτου

$$S_1 = |x(1) - x(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

- Από  $t = 1$  μέχρι  $t = 3$

$$S_2 = |x(3) - x(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

- Από  $t = 3$  μέχρι  $t = 5$

$$S_3 = |x(5) - x(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

Άρα, το ολικό διάστημα  $S$  που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5 s είναι

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 4 + 20 = 28 \text{ m.}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

(Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων στις ασκήσεις 1-18)

1. i)  $f(x) = -5$       ii)  $f(x) = x^4$       iii)  $f(x) = x^9$ .

2. i)  $f(x) = x^{3/2}$       ii)  $f(x) = x^{-3}$       iii)  $f(x) = x^{-5}$ .

3. i)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$       ii)  $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ ,  $x > 0$ .

4. i)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$     ii)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$     iii)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ ,  $x > 0$ .

5. i)  $f(x) = 4x^3$     ii)  $f(x) = 6x^{-5}$     iii)  $f(x) = -\frac{2}{5}x^{20}$ .

6. i)  $f(x) = \frac{-6}{\sqrt[4]{x}}$     ii)  $f(x) = 6x\sqrt{x}$ .

7. i)  $f(x) = x^4 + 3x^2$     ii)  $f(x) = x^2 + 5 + \frac{3}{x}$     iii)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ .

8. i)  $f(x) = 8x^3 - \eta\mu x + 5$     ii)  $f(x) = 6\sigma\upsilon\nu x - 8(x^2 + x)$ .

9. i)  $f(x) = (x^3 + 1)(x^4 + 1)$     ii)  $f(x) = \eta\mu x(1 - \sigma\upsilon\nu x)$ .

10. i)  $f(x) = x\sigma\upsilon\nu x + 3(x + 1)(x - 1)$     ii)  $f(x) = 4x^2\eta\mu x - 3x^2\sigma\upsilon\nu x$ .

11. i)  $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$     ii)  $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x}$     iii)  $f(x) = \frac{x + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$ .

12. i)  $f(x) = \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$     ii)  $f(x) = \frac{3}{(x + 1)^2}$ .

13. i)  $f(x) = (x - 1)^5$     ii)  $f(x) = (2x + 1)^5$     iii)  $f(x) = (2x^2 - 3x)^5$ .

14. i)  $f(x) = \eta\mu^3 x$     ii)  $f(x) = \eta\mu x^3$     iii)  $f(x) = x \cdot \eta\mu 4x$     iv)  $f(x) = \varepsilon\phi 3x$ .

15. i)  $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$     ii)  $f(x) = \sqrt{1 + \eta\mu x}$ .

16. i)  $f(x) = e^{3x}$     ii)  $f(x) = e^{-x^2}$     iii)  $f(x) = e^{\alpha x + \beta}$     iv)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$ .

17. i)  $f(x) = \ln 2x$       ii)  $f(x) = \ln \frac{1}{x^3}$ .

iii)  $f(x) = \ln(\alpha x + \beta)$       iv)  $f(x) = \ln \sqrt{x-1}$ .

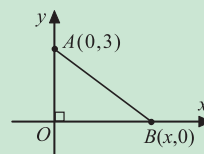
18. i)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$       ii)  $f(x) = e^x \ln x$ .

Σφ 19. i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης  $f(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$  στο σημείο της  $A(3, f(3))$ .

ii) Ομοίως της καμπύλης της συνάρτησης  $f(\theta) = \frac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta}$  στο σημείο της  $A\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ .

20. Το βάρος  $B$  σε γραμμάρια ενός θηλυκού ποντικιού ύστερα από  $t$  εβδομάδες δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση  $B(t) = 1 + \frac{1}{4}(t+2)^2$ , όπου  $t \leq 8$ . Να βρείτε το ρυθμό ανάπτυξης του ποντικιού: i) ύστερα από  $t$  εβδομάδες και ii) ύστερα από 1, 2 και 8 εβδομάδες.

21. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων  $A(0,3)$  και  $B(x,0)$  ως προς  $x$  όταν  $x = 10$ .



Σφ 22. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x(1-x)$  στο σημείο της  $O(0, f(0))$  να σχηματίζει με τον άξονα  $x$  γωνία  $60^\circ$ .

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

Σφ 1. Σε ποια σημεία της καμπύλης της συνάρτησης  $f(x) = \frac{3x}{x+1}$  η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = 3x + 5$ ;

Σφ 2. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα  $x'x$ .

Σφ

3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  που οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας  $x\hat{O}y$ .

4. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα έτσι ώστε η θέση του σε χρόνο  $t$  να δίνεται από τον τύπο  $x(t) = t^3 - 2t^2 + t$ . Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος σε χρόνο  $t$  και να προσδιορίσετε πότε το σώμα είναι ακίνητο. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος στις χρονικές αυτές στιγμές;

5. Αν  $f(x) = A \sin \omega x + B \eta \mu \omega x$ , να δείξετε ότι  $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ .

Πφ

6. Αν  $f(x) = \alpha e^{px} + \beta e^{-px}$ , να δείξετε ότι  $f''(x) = p^2 f(x)$ .

7. Αν  $f(x) = e^{\mu x}$ , να βρείτε το  $\mu$  ώστε να ισχύει  $f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) = 0$ .

8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης  $f(x) = 2\eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu x$  στο σημείο της με  $x = \frac{\pi}{3}$ .

9. Ο ρυθμός της φωτοσύνθεσης  $P$  ενός φυτού δίνεται από τον τύπο

$$P(I) = \frac{I}{\alpha + \beta I}, \quad I \geq 0, \text{ όπου } I \text{ η ένταση του φωτός και } \alpha, \beta \text{ σταθερές.}$$

- i) Να βρείτε την  $P'(I)$  ή, όπως λέγεται, τη *φωτοχημική ικανότητα* του φυτού, καθώς και την  $P'(0)$ .

ii) Να δείξετε ότι  $P'(I) = \frac{1}{\alpha} [1 - \beta P(I)]^2$ .

10. Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σε έναν κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο  $y(t) = A \eta \mu \omega t$ , όπου  $t$  ο χρόνος και τα  $A, \omega$  σταθερές.

- i) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του  $t$ .

- ii) Να δείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης  $y$ .

- iii) Να δείξετε ότι, όταν η επιτάχυνση είναι 0, το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο.

## 1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

### Το Κριτήριο της Πρώτης Παραγώγου

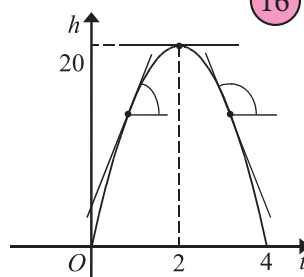
Σε προηγούμενες τάξεις χρειάστηκε να εφαρμόσουμε τις μεθόδους της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας για να επιλύσουμε προβλήματα στα οποία σκοπός ήταν να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε την τιμή ενός μεγέθους. Για παράδειγμα, μεταξύ όλων των ορθογωνίων με την ίδια περίμετρο βρήκαμε τις διαστάσεις εκείνου του ορθογωνίου που έχει το μέγιστο εμβαδόν και μεταξύ όλων των ορθογωνίων με το ίδιο εμβαδόν, αναζητήσαμε τις διαστάσεις εκείνου του ορθογωνίου που έχει την ελάχιστη περίμετρο. Βέβαια οι μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση των προβλημάτων αυτών δύσκολα μπορούν να εφαρμοστούν και για την επίλυση προβλημάτων άλλης μορφής. Με τη βοήθεια όμως της παραγώγου μπορούμε να διατυπώσουμε μια γενική μέθοδο προσδιορισμού της μέγιστης ή της ελάχιστης τιμής ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να βρούμε το μέγιστο ύψος στο οποίο μπορεί να φθάσει ένα σώμα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ . Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , τότε, σύμφωνα με όσα μας διδάσκει η Φυσική, το ύψος  $h$  του σώματος ύστερα από  $t$  δευτερόλεπτα θα είναι

$$h(t) = 20t - 5t^2 = -5t^2 + 20t. \quad (1)$$

Επομένως η γραφική παράσταση της  $h(t)$  θα είναι μια παραβολή η οποία:

- Τέμνει τον άξονα των  $t$  στα σημεία  $t = 0$  και  $t = 4$ .
- Παρουσιάζει μέγιστο για  $t = -\frac{\beta}{2\alpha} = 2$  που είναι ίσο με  $h(2) = 20$ .
- Είναι γνησίως αύξουσα για  $t < 2$  και γνησίως φθίνουσα για  $t > 2$ .



Ας δούμε τώρα πώς μεταβάλλεται το πρόσημο της παραγώγου  $h'(t) = -10t + 20$  στο διάστημα  $[0, 4]$ .

Λύνοντας την ανίσωση  $h'(t) > 0$ , βρίσκουμε ότι αριστερά του 2 όπου η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, η παράγωγός της είναι θετική, ενώ δεξιά του 2 όπου η συνάρτηση είναι φθίνουσα, η παράγωγός της είναι αρνητική.

|         |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|
| $t$     | 0 | 2 | 4 |   |
| $h'(t)$ |   | + | 0 | - |

Από τα παραπάνω φαίνεται να υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στη μονοτονία και στην παράγωγο μιας συνάρτησης.

Αποδεικνύεται ότι:

**ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ 2ος!!**

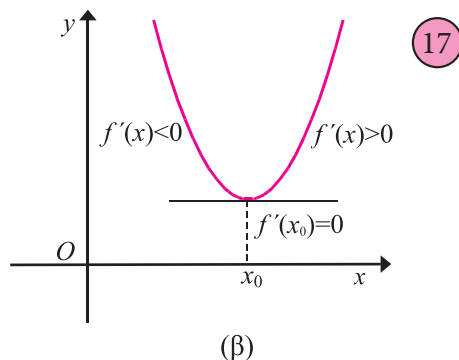
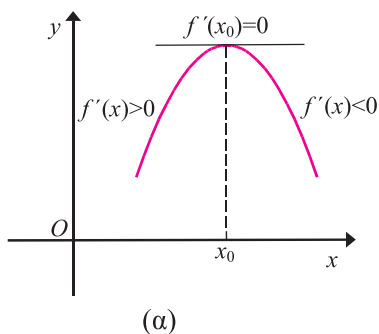
- 5ος**
- Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .
  - Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

Παρατηρούμε ακόμα ότι στο σημείο  $t = 2$ , όπου η  $h$  παρουσιάζει μέγιστο, η  $h'$  μηδενίζεται, ενώ εκατέρωθεν του  $t = 2$  η  $h'$  αλλάζει πρόσημο.

Αποδεικνύεται ότι:

**Παραγωγίσμη!! 2ος!!**

- 5ος**
- Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f'(x_0) = 0$  για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  για  $x = x_0$  μέγιστο.
  - Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f'(x_0) = 0$  για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $f'(x) < 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  για  $x = x_0$  ελάχιστο.



### ΣΧΟΛΙΟ

Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f'(x_0) = 0$ , για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  και η παραγωγός της  $f'$  διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του  $x_0$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$  και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο διάστημα αυτό.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha \neq 0$ .

**ΛΥΣΗ**

Έχουμε:

$$f'(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = 2\alpha x + \beta.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow 2\alpha x > -\beta.$$

Επομένως, αν  $\alpha > 0$ , τότε  $f'(x) > 0$  για  $x > -\frac{\beta}{2\alpha}$  και  $f'(x) < 0$  για  $x < -\frac{\beta}{2\alpha}$ .

|         |           |                          |           |
|---------|-----------|--------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{\beta}{2\alpha}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$                      | $+$       |

ενώ αν  $\alpha < 0$ , τότε  $f'(x) > 0$  για  $x < -\frac{\beta}{2\alpha}$  και  $f'(x) < 0$  για  $x > -\frac{\beta}{2\alpha}$ .

|         |           |                          |           |
|---------|-----------|--------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{\beta}{2\alpha}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$                      | $-$       |

Άρα, η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha \neq 0$  για  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$  παρουσιάζει ελάχιστο αν  $\alpha > 0$  και μέγιστο αν  $\alpha < 0$ . Η τιμή του μεγίστου ή του ελαχίστου είναι ίση με  $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \alpha\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ .

**2.** Ένας πληθυσμός 1000 βακτηριδίων εισάγεται σε ένα θρεπτικό μέσον και αναπτύσσεται σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2},$$

όπου  $t$  ο χρόνος σε ώρες. Σε πόσο χρόνο ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα είναι μέγιστος και ποιος θα είναι ο πληθυσμός αυτός;

**ΛΥΣΗ**

Έχουμε

$$p'(t) = \frac{1000(100+t^2) - 1000t \cdot 2t}{(100+t^2)^2} = \frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2}.$$

$$p'(t) = 0 \Leftrightarrow 1000(100-t^2) = 0 \Leftrightarrow t = 10 \text{ ή } t = -10.$$

Επειδή ο χρόνος  $t$  είναι θετικός, η ρίζα  $t = -10$  απορρίπτεται.

$$p'(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 100-t^2 > 0 \Leftrightarrow t^2-100 < 0$$

$$\Leftrightarrow (t+10)(t-10) < 0 \Leftrightarrow -10 < t < 10.$$

Επομένως  $p'(t) > 0$  για  $0 < t < 10$ .Έχουμε λοιπόν  $p'(10) = 0$ ,  $p'(t) > 0$  στο  $(0,10)$  και  $p'(t) < 0$ , στο  $(10,+\infty)$ .

Άρα ύστερα από 10 ώρες θα παρουσιαστεί ο μέγιστος πληθυσμός βακτηριδίων που θα είναι ίσος με

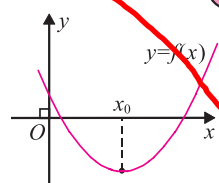
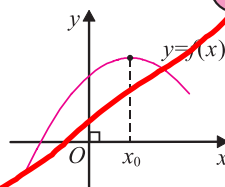
$$p(10) = 1000 + \frac{1000 \cdot 10}{100+10^2} = 1000 + \frac{1000 \cdot 10}{200} = 1050.$$

**Το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου**

• Έστω μια συνάρτηση  $f$ , της οποίας η καμπύλη είναι μία παραβολή και η οποία για  $x = x_0$  παρουσιάζει μέγιστο. Τότε, για τιμές κοντά στο  $x_0$ , η συνάρτηση είναι αύξουσα για  $x \leq x_0$  και φθίνουσα για  $x \geq x_0$ . Αυτό σημαίνει ότι η  $f'$  από θετική γίνεται αρνητική, δηλαδή είναι φθίνουσα συνάρτηση. Αφού λοιπόν η  $f'$  είναι φθίνουσα, η παράγωγός της, δηλαδή η  $f''$  θα είναι αρνητική.

Επομένως,  $f''(x_0) < 0$ .**ΟΧΙ**

• Έστω τώρα η συνάρτηση  $f$ , της οποίας η καμπύλη είναι μια παραβολή και η οποία για  $x = x_0$  παρουσιάζει ελάχιστο. Τότε, για τιμές του  $x$  κοντά στο  $x_0$ , η συνάρτηση είναι φθίνουσα για  $x \leq x_0$  και αύξουσα για  $x \geq x_0$ . Αυτό σημαίνει ότι η  $f'$  από αρνητική γίνεται θετική, δηλαδή είναι αύξουσα



συνάρτηση. Άρα, η παράγωγος της  $f'$ , δηλαδή η  $f''$  θα είναι θετική. Επομένως,  $f''(x_0) > 0$ .

Γενικά:

Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ .

Αποδεικνύεται ότι:

- Αν ισχύουν  $f'(x_0) = 0$  και  $f''(x_0) < 0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει (τοπικό) μέγιστο στο  $x = x_0$ .
- Αν ισχύουν  $f'(x_0) = 0$  και  $f''(x_0) > 0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο στο  $x = x_0$ .

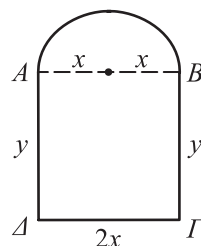
Αν επιπλέον το  $x_0$  είναι η μοναδική ρίζα της  $f'$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι ολικό ακρότατο στο  $(\alpha, \beta)$ .

### ΣΧΟΛΙΟ

Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f'(x_0) = 0$  και  $f''(x_0) = 0$ , τότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο της 2ης παραγώγου για τον προσδιορισμό των ακρότατων της  $f$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Ένα παράθυρο έχει το διπλανό σχήμα και αποτελείται από ένα ορθογώνιο που περικλείεται στο άνω μέρος από ένα ημικύκλιο. Το παράθυρο έχει περίμετρο 30 μέτρα. Να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει ώστε να μπαίνει από αυτό όσο γίνεται περισσότερη φως.



### ΛΥΣΗ

- Έστω  $x$  η ακτίνα του ημικυκλίου. Τότε  $AB = \Gamma\Delta = 2x$ . Αν  $A\Delta = B\Gamma = y$ , έχουμε:

$$y = 2x + y + \frac{1}{2} \cdot 2\pi x = 30$$

$$2y = 30 - 2x - \pi x \quad (1)$$

Η μεγαλύτερη ποσότητα φωτός θα διέρχεται από το παράθυρο, όταν το εμβαδόν του είναι μέγιστο.

Αν  $E$  το εμβαδόν του παραθύρου, τότε

$$E = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 = x(30 - 2x - \pi x) + \frac{1}{2}\pi x^2 = 30x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2,$$

δηλαδή  $E(x) = 30x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2$ .

• Έχουμε  $E'(x) = 30 - (4 + \pi)x$  και  $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{30}{4 + \pi}$ .

Επειδή  $E''(x) = -(4 + \pi) < 0$ , συμπεραίνουμε ότι για  $x = \frac{30}{4 + \pi}$  η συνάρτηση έχει τη μέγιστη τιμή της. Για την τιμή αυτή του  $x$  από την (1) έχουμε

$$2y = 30 - (2 + \pi) \cdot \frac{30}{4 + \pi} = \frac{60}{4 + \pi} \text{ και επομένως } y = \frac{30}{\pi + 4}.$$

Άρα για  $x = y = \frac{30}{\pi + 4} \approx 4,2$  m, το παράθυρο έχει το μέγιστο εμβαδό.

**2.** Το κέρδος  $P$  σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου ορισμένου τύπου και ο χρόνος παραγωγής του  $t$  σε ώρες σχετίζονται με τον τύπο:

$$P(t) = 20 \left( 200 - \frac{250}{t} - t^2 \right), \quad t > 3.$$

Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος.

### ΛΥΣΗ

Έχουμε  $P'(t) = 20 \left( \frac{250}{t^2} - 2t \right)$ . Επομένως

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{250}{t^2} - 2t = 0 \Leftrightarrow t^3 = 125 \Leftrightarrow t = 5.$$

Θα εξετάσουμε αν η τιμή  $t = 5$  αντιστοιχεί σε μέγιστο κέρδος με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου.

Έχουμε

$$P''(t) = 20 \left( \frac{250}{t^2} - 2t \right)' = 20 \left( -\frac{500}{t^3} - 2 \right) = -20 \left( \frac{500}{t^3} + 2 \right) < 0, \text{ αφού } t > 3.$$

Άρα για  $t = 5$  έχουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος που είναι ίσο με

$$P(5) = 20(200 - 50 - 25) = 20 \cdot 125 = 2500 \text{ ευρώ.}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων
 

i)  $f(x) = x^2 - 2x$ 
ii)  $f(x) = -3x^2 + 6$ 
iii)  $f(x) = x^2 - 2x + 4$ .
2. Ομοίως των συναρτήσεων
 

i)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ 
ii)  $f(x) = -x^3 + 3x + 1$ .
3. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα
 

i)  $f(x) = 2x^3$ 
ii)  $f(x) = -x^3 + 16$ 
iii)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$

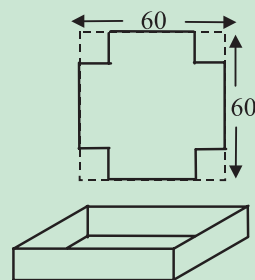
iv)  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x - 11$ .
4. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι ίσο με 40. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.
5. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό  $100 \text{ m}^2$  ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο;
6. Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τετράγωνη βάση και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει όγκο  $32 \text{ dm}^3$ . Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού, ώστε για την κατασκευή του να χρειάζεται το ελάχιστο δυνατό υλικό.
7. Αν ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει επιφάνεια ίση με  $12 \text{ dm}^2$ , ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός όγκος του;
8. Να βρείτε το σημείο της ευθείας με εξίσωση  $y = 2x - 3$  που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.
9. Η ταχύτητα ενός κύματος μήκους  $\lambda$  μέσα στο νερό είναι  $v = \kappa \sqrt{\frac{\lambda}{c} + \frac{c}{\lambda}}$ , όπου  $\kappa$  και  $c$  θετικές σταθερές. Για ποιο μήκος κύματος έχουμε την ελάχιστη ταχύτητα;
10. Να προσδιοριστούν δύο θετικοί αριθμοί με τις εξής ιδιότητες:  
Το άθροισμά τους να είναι 10 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

## Β' ΟΜΑΔΑΣ

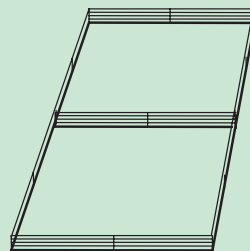
1. Αν  $v = 100p(1 + \ln r) - 100qr$ , όπου  $p$  και  $q$  θετικές σταθερές, να δείξετε ότι το  $v$  έχει τη μέγιστη τιμή του όταν  $r = \frac{p}{q}$ .

2. Αν  $v = \kappa x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ , όπου  $\kappa$  θετική σταθερά, να δείξετε ότι το  $v$  έχει τη μέγιστη τιμή του όταν  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

3. Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 60 cm θα κατασκευαστεί ένα δοχείο, ανοικτό από πάνω, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα επάνω οι πλευρές. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε να έχει το μέγιστο όγκο.



4. Θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή  $16000 \text{ m}^2$  σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις και να τη χωρίσουμε στη μέση. Ο φράχτης για την περίφραξη κοστίζει 9 ευρώ/m και ο φράχτης για το χώρισμα 6 ευρώ/m. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε, να έχουμε το ελάχιστο κόστος για την περίφραξη μαζί με το χώρισμα.



5. Σε έναν κύκλο ακτίνας  $\rho$  να εγγράψετε το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.
6. Ένα σύρμα μήκους  $\lambda$  κόβεται σε δύο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο αντιστοίχως. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι ελάχιστο, όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.
- 7\*. Η έρευνα έχει δείξει ότι αν σε έναν ασθενή γίνει μια υποδόρια ένεση, τότε ύστερα από χρόνο  $t$  η συγκέντρωση  $y$  του φαρμάκου στο αίμα του δίνεται από τη συνάρτηση  $y(t) = \frac{A}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$ , όπου  $A$ ,  $k_1$  και  $k_2$  θετικές σταθερές με  $k_2 > k_1$ . Να βρείτε το χρόνο  $t$  στον οποίο το φάρμακο θα παρουσιάσει τη μέγιστη συγκέντρωση.

8. Ένα ορισμένο όχημα όταν ταξιδεύει με ταχύτητα  $v$  km/h, καταναλώνει την ώρα  $6 + 0,0001v^3$  λίτρα καύσιμα.
- Να βρείτε τη συνολική ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται για να διανύσει μια απόσταση 1000 km με σταθερή ταχύτητα  $v$ .
  - Να βρείτε την τιμή του  $v$  για την οποία έχουμε την οικονομικότερη κατανάλωση καυσίμων, καθώς και την ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται το όχημα για να διανύσει τα 1000 km.
- Να σχολιάσετε αν η απάντηση στο ερώτημα ii) είναι εφαρμόσιμη λόγω της μεγάλης απόστασης.
9. Δύο ηλεκτρικές αντιστάσεις πρέπει να έχουν άθροισμα  $450\Omega$ . Πως πρέπει να επιλεγούν ώστε όταν συνδεθούν εν παραλλήλω να δίνουν τη μέγιστη ολική αντίσταση;
10. Το μεσημέρι ένα ιστιοφόρο βρίσκεται 20 χιλιόμετρα βορείως ενός φορτηγού πλοίου. Το ιστιοφόρο ταξιδεύει νότια με 40 km/h, και το φορτηγό ανατολικά με 20 km/h. Αν η ορατότητα είναι 10 km, θα έχουν οι άνθρωποι των δύο πλοίων οπτική επαφή σε κάποια στιγμή;

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν μια συμμάτινη ράβδος είναι ομογενής, τότε η γραμμική της πυκνότητα  $\rho$  ορίζεται ως η μάζα της ανά μονάδα μήκους  $\left(\rho = \frac{m}{l}\right)$  και μετριέται σε χιλιόγραμμα ανά μέτρο (kg/m). Όμως αν η ράβδος δεν είναι ομογενής και η μάζα της μετρούμενη από το αριστερό άκρο της μέχρι το σημείο που απέχει από το άκρο αυτό απόσταση  $x$  μέτρα δίνεται από τη συνάρτηση  $m = f(x)$ , τότε ορίζουμε ως γραμμική πυκνότητα  $\rho$  στο σημείο  $x$  το όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , δηλαδή την παράγωγο της μάζας ως προς το μήκος.



Αν υποθέσουμε ότι για μια ράβδο η μάζα της δίνεται από τη συνάρτηση  $m = f(x) = \sqrt{x}$ , όπου το  $x$  μετριέται σε μέτρα και η μάζα της σε χιλιόγραμμα, να βρεθεί

- Η μέση πυκνότητα του τμήματος της ράβδου στο διάστημα  $[1, 1,21]$
- Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου για  $x = 1$ .

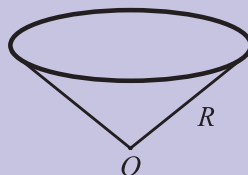
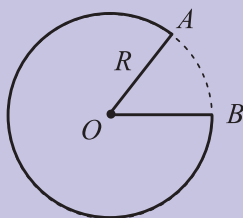
2. Το κόστος  $C$  της ημερήσιας παραγωγής  $x$  μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί  $v$  εργάτες δίνεται από τον τύπο:

$$C(x) = x^3 - 3vx^2 + 5v^3 \text{ ευρώ}$$

Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι  $16 - v$  ευρώ.

Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

3. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$  η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;
4. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα δίνεται το σημείο  $A(\alpha, \beta)$  του 1ου τεταρτημορίου. Μια ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το  $A$  και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες  $0x$  και  $0y$  στα  $p$  και  $q$  αντιστοίχως. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος  $p + q$  είναι ίση με  $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ .
5. Ποιος κύλινδρος με άθροισμα διαμέτρου και ύψους 20 cm έχει το μέγιστο δυνατό όγκο;
6. Ένα κυλινδρικό δοχείο πρέπει να έχει χωρητικότητα 1 lt. Να βρείτε τις διαστάσεις του οι οποίες ελαχιστοποιούν το κόστος του μετάλλου από το οποίο θα κατασκευαστεί το δοχείο.
7. Από έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας  $R$  αφαιρούμε έναν κυκλικό τομέα  $OAB$  και ενώνοντας τις ακτίνες  $OA$  και  $OB$  κατασκευάζουμε ένα κωνικό ποτήρι.
- Να βρείτε τη μέγιστη χωρητικότητα του ποτηριού.



8. Αν  $C(x)$  είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή  $x$  μονάδων ενός προϊόντος, τότε η συνάρτηση  $C$  λέγεται **συνάρτηση κόστους**, το πηλίκο  $c(x) = \frac{C(x)}{x}$  λέγεται **μέσο κόστος** και το όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$  λέγεται **οριακό κόστος**.

- α) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο  $x$  το μέσο κόστος είναι ελάχιστο, τότε ισχύει:

$$\text{οριακό κόστος} = \text{μέσο κόστος}.$$

- β) Μια εταιρεία εκτιμά ότι το κόστος (σε δολάρια) για την παραγωγή  $x$  μονάδων ενός προϊόντος είναι  $C(x) = \frac{1}{1000} \cdot x^2 + 2x + 2600$ .

- i) Να βρείτε το κόστος, το μέσο κόστος και το οριακό κόστος για την παραγωγή 1000 μονάδων, 2000 μονάδων και 3000 μονάδων.

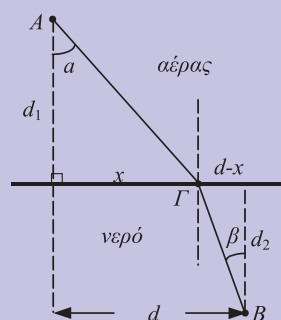
- ii) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής για το οποίο το μέσο κόστος είναι το χαμηλότερο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους;

9. Αν  $x$  μονάδες ενός προϊόντος είναι διαθέσιμες για πώληση, τότε η τιμή πώλησης  $p(x)$  της μονάδας του προϊόντος λέγεται **συνάρτηση ζήτησης**. Από την πώληση  $x$  μονάδων του προϊόντος, τα συνολικά έσοδα είναι  $R(x) = x \cdot p(x)$ . Η συνάρτηση  $R$  λέγεται **συνάρτηση εσόδων** και η παράγωγος  $R'$  λέγεται **οριακή συνάρτηση εσόδων**. Επίσης από την πώληση  $x$  μονάδων του προϊόντος το συνολικό κέρδος είναι  $P(x) = R(x) - C(x)$ . Η συνάρτηση  $P$  καλείται **συνάρτηση κέρδους** και η παράγωγος  $P'$  καλείται **οριακή συνάρτηση κέρδους**.

- α) Να αποδείξετε ότι αν το κέρδος για κάποιο  $x$  είναι μέγιστο, τότε τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος.

- β) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη για μια εταιρεία, αν η συνάρτηση κόστους είναι  $C(x) = 3800 + 5x - 0,001x^2$  και η συνάρτηση ζήτησης  $p(x) = 50 - 0,01x$ ;

10. Έστω  $v_1$  η ταχύτητα του φωτός στον αέρα και  $v_2$  η ταχύτητα του στο νερό. Σύμφωνα με την **αρχή του Fermat**, μια ακτίνα φωτός από ένα σημείο  $A$  του αέρα φθάνει σε ένα σημείο  $B$  του νερού ακολουθώντας μια πορεία  $AGB$  η οποία ελαχιστοποιεί τον απαιτούμενο χρόνο. Να αποδείξετε ότι



- i) Ο χρόνος που χρειάζεται το φως για τη διαδρομή  $AGB$  είναι

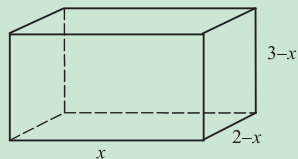
$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}}{v_2}.$$

- ii) Να υπολογίσετε την  $t'(x)$ .

- iii) Να αποδείξετε ότι  $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = \frac{v_1}{v_2}$ .

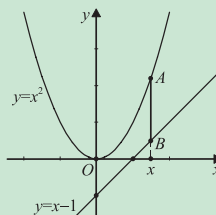
## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ο όγκος του διπλανού ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου εκφράζεται με τη συνάρτηση  $V(x) = x(2-x)(3-x)$ . Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής είναι το διάστημα:



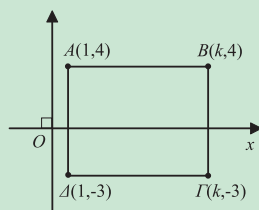
A.  $[0, +\infty)$  B.  $(0, 2)$  Γ.  $(-\infty, 0]$  Δ.  $[2, 3]$ .

2. Στο διπλανό σχήμα το μήκος του τμήματος AB είναι



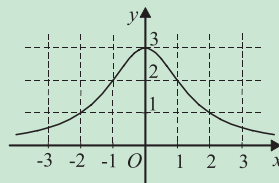
A.  $x$  B.  $x^2$  Γ.  $x^2 - x + 1$  Δ.  $x - 1 - x^2$ .

3. Το εμβαδόν του διπλανού ορθογωνίου ABΓΔ είναι 63. Η τιμή του  $\kappa$  είναι



A. 8 B. 2 Γ. -6 Δ. 10.

4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{6}{2+x^2}$ .

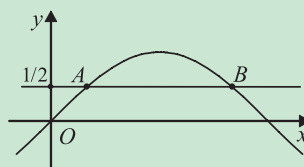


Οι τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει

$$\frac{6}{2+x^2} > 2 \text{ είναι:}$$

A.  $x > 2$  B.  $-1 < x < 1$  Γ.  $-2 < x < 2$  Δ.  $x < -2$ .

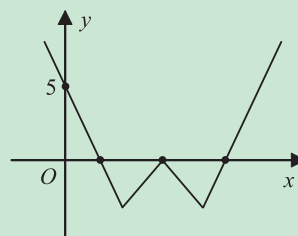
5. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία A και B είναι τα σημεία τομής των καμπυλών των συναρτήσεων  $f(x) = \eta\mu x$  και  $g(x) = \frac{1}{2}$ . Το μήκος του τμήματος AB είναι:



A.  $\frac{\pi}{2}$  B.  $\frac{\pi}{3}$  Γ.  $\frac{2\pi}{3}$  Δ.  $\frac{\pi}{6}$ .

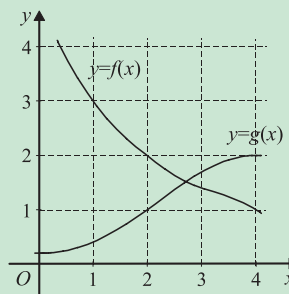
6. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το πλήθος των διακεκριμένων λύσεων της εξίσωσης  $(f(x))^2 = f(x)$  είναι:

A. 2   B. 3   Γ. 4   Δ. 5   E. 6



7. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων  $f$  και  $g$ . Το άθροισμα  $f(2) + g(2)$  είναι:

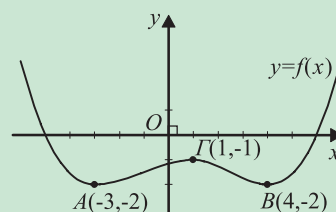
A. 5   B. 4   Γ. 3   Δ. 2



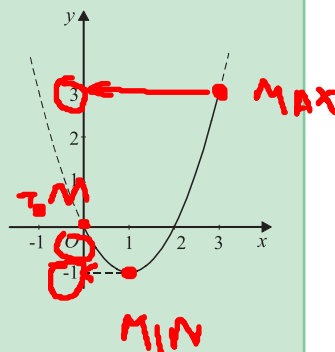
8. Η ευθεία  $y = \kappa$  θέλουμε να τέμνει τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  σε 4 διαφορετικά σημεία. Τότε πρέπει:

A.  $\kappa > -1$    B.  $\kappa = -1$

Γ.  $\kappa < -2$    Δ.  $-2 < \kappa < -1$

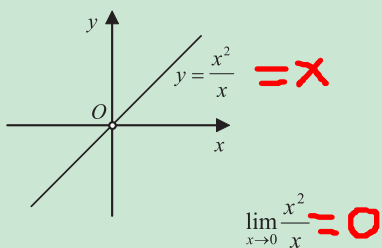


9. Με βάση τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 2x$  /  $A = [0, 3]$  να γράψετε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

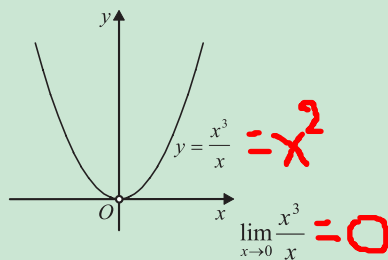


10. Για καθένα από τα παρακάτω όρια να χρησιμοποιήσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση για να βρείτε την τιμή του ή να προσδιορίσετε ότι δεν υπάρχει.

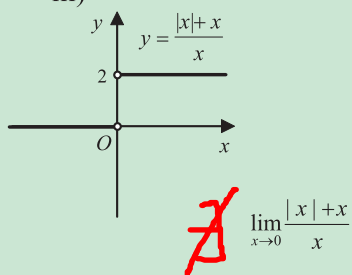
i)



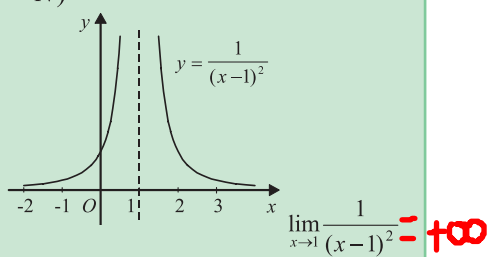
ii)



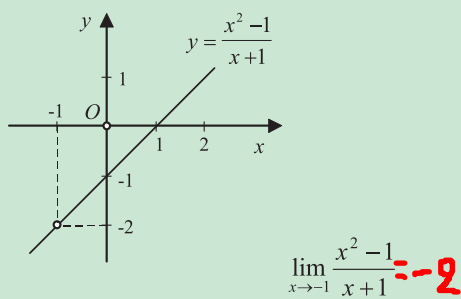
iii)



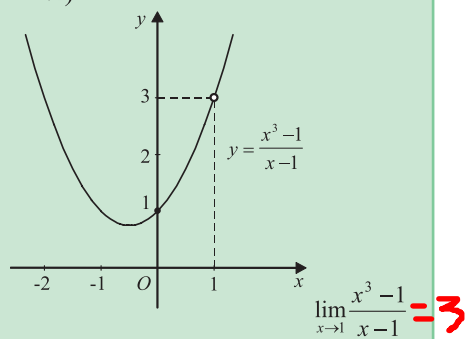
iv)



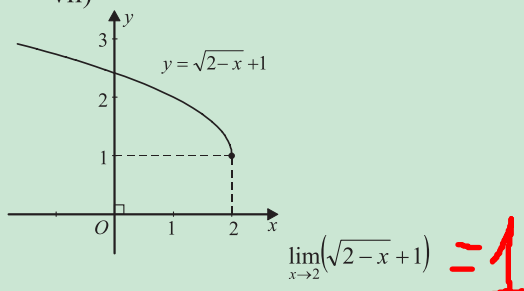
v)



vi)



vii)



11. i) Αν  $f(x) = -3x^2$  και  $f'(\alpha) = 12$ , ποια είναι η τιμή του  $\alpha$ ; **-2**

ii) Αν  $f(x) = \frac{1}{x}$  και  $f'(\alpha) = -\frac{1}{9}$ , ποιες τιμές μπορεί να έχει ο  $\alpha$ ;  **$\pm 3$**

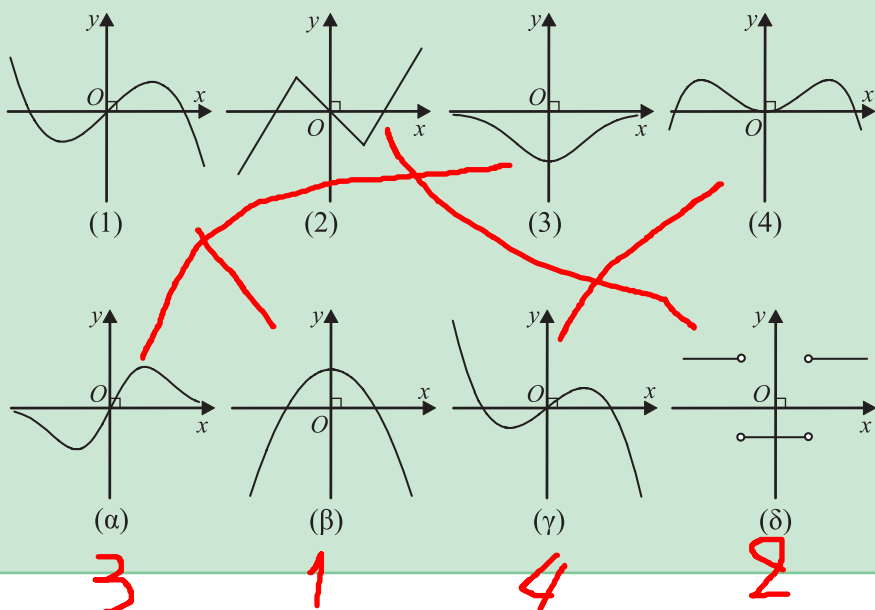
iii) Αν  $f(x) = \eta\mu x$  και  $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ποιο είναι το σύνολο των τιμών του  $\alpha$ ;  
 **$\alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$**

12. Αν για τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ισχύουν  $f(3) = 4$ ,  $g(3) = 2$ ,  $f'(3) = -6$  και  $g'(3) = 5$  να βρείτε για  $x = 3$  τις παραγώγους των συναρτήσεων

α)  $f + g$     β)  $f - g$     γ)  $f \cdot g$     δ)  $\frac{f}{g}$   
**-1    -11    8    -8**

13. Αν  $h(x) = f(g(x))$  και  $g(3) = 6$ ,  $g'(3) = 4$  και  $f'(6) = 7$ , να βρείτε τον αριθμό  $h'(3)$ . **28**

14. Στην πρώτη γραμμή του παρακάτω πίνακα υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις μερικών συναρτήσεων και στη δεύτερη γραμμή οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση στην παράγωγό της.





# 2 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

---

## Εισαγωγή

Ο όρος “Στατιστική” ενδεχομένως να προέρχεται από τη λατινική λέξη “status” (πολιτεία, κράτος) η οποία, χρησιμοποιήθηκε αρχικά για το χαρακτηρισμό αριθμητικών δεδομένων που αναφέρονται κυρίως στον πληθυσμό μιας χώρας. Μπορεί όμως να προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη στατίζω (τοποθετώ, ταξινομώ, συμπεραίνω). Με την εμφάνιση της Στατιστικής και στα πρώτα στάδια της ανάπτυξής της οι άνθρωποι την ταύτιζαν με την παράθεση τεράστιων πινάκων με δεδομένα σχετικά με τους θανάτους, τις γεννήσεις, τους φόρους, τα προϊόντα, τους άνδρες σε στρατεύσιμη ηλικία κτλ., προσπαθώντας έτσι να περιγράψουν διάφορα δημογραφικά, οικονομικά και πολιτικά φαινόμενα. Η αρχαιότερη ίσως συλλογή στατιστικών στοιχείων θεωρείται η απογραφή πληθυσμού που έγινε το 2238 π.Χ. στην Κίνα από τον αυτοκράτορα Yao. Επίσης, στοιχειώδεις απογραφές φαίνεται να έχουν πραγματοποιηθεί από τους Σίνες, τους Αιγυπτίους και τους Πέρσες. Ο όρος Στατιστική αναφέρεται επίσης και από το Σωκράτη (Ξενοφώντας “Απομνημονεύματα”) και από τον Αριστοτέλη (“Πολιτεία”). Όπως γνωρίζουμε απογραφή πληθυσμού είχε επίσης διαταχθεί και από τον καίσαρα Αύγουστο στην περίοδο της γέννησης του Χριστού.

Στην αρχαιότητα, η συγκέντρωση στατιστικών στοιχείων είχε στόχο τον εντοπισμό των πολιτών που είχαν υποχρέωση να υπηρετήσουν ως πολεμιστές ή να πληρώσουν φόρο. Συστηματική συλλογή δεδομένων για τον πληθυσμό και την οικονομία άρχισε κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης στις πόλεις Βενετία και Φλωρεντία στην Ιταλία, και γρήγορα επεκτάθηκε και σε άλλες χώρες της Δυτικής Ευρώπης. Ο μεγάλος ρυθμός θνησιμότητας στην Ευρώπη οφειλόταν στις επιδημικές ασθένειες, στους πολέμους και στις λιμοκτονίες. Στις αρχικές καταγραφές των θανάτων από την πανώλη, τη φοβερή ασθένεια που εμφανίστηκε το 1348 και κράτησε πάνω από 400 χρόνια, προστέθηκαν στη συνέχεια και οι θάνατοι από άλλες αιτίες. Στα 1620 ο Άγγλος εμπορευόμενος Graunt από δειγματοληπτική έρευνα που έκανε σε οικογένειες του Λονδίνου βρήκε ότι σε κάθε 88 άτομα υπήρχαν 3 θάνατοι. Χρησιμοποιώντας τους καταλόγους του Λονδίνου, που έδιναν 13.200 θανάτους το 1620, εκτίμησε τον πληθυσμό του Λονδίνου το έτος αυτό στα 387.200 άτομα.

Μια πραγματικά σπουδαία στατιστική απογραφή στην εποχή του Γουλιέλμου του Κατακτητή, στο τέλος του 11ου αιώνα, αναφέρεται σε διάφορες μονάδες παραγωγής της Αγγλίας όπως μεταλλεία, ιχθυοτροφεία κ.ά. Από το 16ο έως το 19ο αιώνα, η ραγδαία ανάπτυξη του εμπορίου ώθησε τις πολιτειακές αρχές στη μελέτη οικονομικών δεδομένων, όπως είναι το εξαγωγικό εμπόριο, το πλήθος και η δυναμικότητα των βιομηχανιών κτλ.

Ενώ παλαιότερα η Στατιστική ασχολείτο μόνο με την παράθεση τεράστιων πινάκων με δεδομένα και αναρίθμητων διαγραμμάτων, σήμερα μπορούμε να διακρίνουμε σε μια στατιστική έρευνα τρία στάδια: Τη συλλογή του στατιστικού υλικού, την επεξεργασία και παρουσίασή του και τέλος την ανάλυση αυτού του υλικού και την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων. Τα τρία αυτά στάδια επιτυγχάνονται με την εφαρμογή καταλλήλων για κάθε περίπτωση στατιστικών μεθόδων, όπως και με τη βοήθεια των Υπολογιστών, οι οποίοι σημείωσαν τεράστια ανάπτυξη στις μέρες μας.

Συμπερασματικά λοιπόν μπορούμε να δώσουμε ως ορισμό της “Στατιστικής” το συνηθέστερο και πλέον γνωστό ορισμό του R.A. Fisher (1890-1962), πατέρα της σύγχρονης Στατιστικής:

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

- το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων
- τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους
- την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

Ο κλάδος της Στατιστικής που ασχολείται με τον πρώτο στόχο λέγεται **σχεδιασμός πειραμάτων** (experimental design) ενώ, με τον δεύτερο ασχολείται η **περιγραφική στατιστική** (descriptive statistics), που αποτελεί και το αντικείμενο μελέτης μας στη συνέχεια. Τέλος, η **επαγωγική στατιστική ή στατιστική συμπερασματολογία** (inferential statistics) περιλαμβάνει τις μεθόδους με τις οποίες γίνεται η προσέγγιση των χαρακτηριστικών ενός μεγάλου συνόλου δεδομένων, με τη μελέτη των χαρακτηριστικών ενός μικρού υποσυνόλου των δεδομένων. Έτσι αν, για παράδειγμα, ο Διευθυντής ενός σχολείου εξετάζοντας ένα δείγμα 100 απουσιών των μαθητών από το σύνολο των απουσιών ενός τριμήνου αναφέρει στο σύλλογο των καθηγητών ότι 20 από τις 100 απουσίες είναι αδικαιολόγητες, τότε απλώς **περιγράφει** αυτό που παρατήρησε. Αν όμως αναφέρει ότι το 20% των απουσιών είναι αδικαιολόγητες, τότε **συμπεραίνει** ότι το ποσοστό των απουσιών όλων των μαθητών του σχολείου είναι (περίπου) το ίδιο με αυτό του δείγματος. Προβαίνει δηλαδή σε μια **επαγωγή** από το δείγμα στον πληθυσμό.

Η Στατιστική σήμερα χρησιμοποιείται ευρύτατα σε όλους σχεδόν τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Βασικές έννοιες της Στατιστικής έχουν εισχωρήσει και ενσωματωθεί σε όλες τις επιστήμες. Από τις Ανθρωπιστικές, Νομικές και Κοινωνικές Επιστήμες (Αρχαιολογία, Λαογραφία, Κοινωνιολογία, Δημογραφία,

...), τις Φυσικές Επιστήμες (Φυσική, Χημεία, Αστρονομία, ...), τις Επιστήμες Υγείας (Ιατρική, Φαρμακευτική, Βιολογία, ...) τις Τεχνολογικές Επιστήμες (Μηχανολογία, Τοπογραφία, Ναυπηγική, ...) μέχρι τις Επιστήμες Οικονομίας και Διοίκησης (Οικονομικά, Χρηματοπιστωτικά, Διαφήμιση, Marketing, ...), βλέπουμε να υπεισέρχεται η Στατιστική είτε με την αρχική περιγραφική μορφή της είτε με τις προηγμένες αναλυτικές τεχνικές της.

Η ανάλυση στατιστικών ερευνών είναι το κυριότερο εργαλείο έρευνας σε ένα μεγάλο φάσμα εφαρμογών των παραπάνω επιστημών. Οι έρευνες των ανθρώπινων πληθυσμών (συχνά αναφερόμενες και ως δημοσκοπήσεις) αποτελούν σπουδαίες πηγές βασικής γνώσης των κοινωνικών επιστημών. Οικονομολόγοι, ψυχολόγοι, κοινωνιολόγοι και πολιτικοί επιστήμονες μελετούν ποικίλα θέματα όπως πρότυπα εσόδων-εξόδων των οικογενειών και των επιχειρήσεων, την επίδραση της επαγγελματικής απασχόλησης των γυναικών στην οικογενειακή ζωή, τις κοινωνιακές και ταξιδιωτικές συνήθειες των κατοίκων μιας πόλης, τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων για τους υποψηφίους και τις θέσεις τους. Πολλά προβλήματα που αντιμετωπίζουν σήμερα οι επιχειρήσεις αφορούν τη διατήρηση, αντικατάσταση ή το κρίσιμο σημείο αντοχής συσκευών ή προσωπικού. Ο διευθυντής μιας βιομηχανίας πρέπει να είναι σε θέση να κατανοεί στατιστικές έρευνες που αφορούν την ποιότητα του προϊόντος και την αποδοτικότητα της παραγωγικής διαδικασίας. Πρέπει επίσης να αντιλαμβάνεται την αποτελεσματικότητα της διαφήμισης και τις προτιμήσεις του καταναλωτή σε μια έρευνα αγοράς. Συμβουλευόμενος και τον στατιστικό μπορεί να πάρει σωστές αποφάσεις αναφορικά με την επέκταση ή μη της επιχείρησης. Σήμερα κάθε γιατρός πρέπει να έχει βασικές γνώσεις Στατιστικής που θα τον βοηθήσουν τόσο στην έρευνα όσο και στην καθημερινή άσκηση του κάθε μορφής και είδους ιατρικού ή βιοϊατρικού, γενικότερα, επαγγέλματος. Η Εθνική Στατιστική Υπηρεσία κάθε χώρας διενεργεί σε τακτά χρονικά διαστήματα δειγματοληπτικές έρευνες, για να πάρει πληροφορίες για τον πληθωρισμό, την απασχόληση και την ανεργία στη χώρα. Ανάλογα με τα αποτελέσματα διαμορφώνεται και η κυβερνητική πολιτική στα θέματα αυτά.

Πέρα από όλα αυτά, διαπιστώνουμε ολοένα και περισσότερο να γίνεται χρήση μεθόδων της Στατιστικής για την υποστήριξη διάφορων θέσεων. Ακόμα και σε τηλεοπτικές αντιπαραθέσεις (κυρίως σε προεκλογικές περιόδους) βλέπουμε τους συνομιλητές να κάνουν χρήση αριθμών, στατιστικών στοιχείων, γραφημάτων και διαγραμμαμάτων, για να δώσουν εγκυρότητα στις απόψεις τους και να πείσουν για τα λεγόμενά τους.

Παραπάνω έχουν αναφερθεί ελάχιστα από τα πεδία εφαρμογών της Στατιστικής. Προφανώς μια λεπτομερής περιγραφή όλων των εφαρμογών δεν είναι δυνατή. Η μελέτη όμως και η γνώση της Στατιστικής βοηθά όχι μόνο στη σωστή χρήση των γνωστών μεθόδων αλλά και στην ανάπτυξη νέων τεχνικών για την αποτελεσματικότερη εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

## 2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

### Πληθυσμός - Μεταβλητές

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να εξετάσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, όταν ενδιαφερόμαστε για:

- α) τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων εν όψει των προσεχών εκλογών
- β) τον αριθμό των υπαλλήλων μιας επιχείρησης
- γ) το ύψος, το βάρος, την ομάδα αίματος και το φύλο των μαθητών της Γ' τάξης Λυκείου
- δ) τις συνέπειες του καπνίσματος στην υγεία των καπνιστών κτλ.

Σε καθένα από τα παραδείγματα αυτά έχουμε ένα σύνολο και θέλουμε να εξετάσουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. Ένα τέτοιο σύνολο λέγεται πληθυσμός (population). Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως μονάδες ή άτομα του πληθυσμού. Στο πρώτο παράδειγμα έχουμε το σύνολο των ψηφοφόρων και μας ενδιαφέρει η προτίμησή τους, ποιο “κόμμα” π.χ. υποστηρίζουν. Στο τρίτο παράδειγμα έχουμε το σύνολο των μαθητών της Γ' Λυκείου και μας ενδιαφέρουν τα τέσσερα χαρακτηριστικά τους: ύψος, βάρος, ομάδα αίματος και φύλο.

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές** (variables) και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα  $X, Y, Z, B, \dots$ . Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**. Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους προκύπτει μια σειρά από δεδομένα, που λέγονται στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις. Τα στατιστικά δεδομένα δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά. Για παράδειγμα, αν εξετάζουμε την ομάδα αίματος δέκα ατόμων, τα στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις που θα προκύψουν μπορεί να είναι: A, B, A, AB, O, AB, AB, AB, O, B. Οι δυνατές όμως τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή “ομάδα αίματος” είναι οι εξής τέσσερις: A, B, AB και O.

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

1. Σε **ποιοτικές ή κατηγορικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί. Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, η ομάδα αίματος (με τιμές A, B, AB, O), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι), οι συνέπειες του καπνίσματος (με τιμές καρδιακά νοσήματα, καρκίνος κτλ), όπως επίσης και η οικονομική κατάσταση και η υγεία των ανθρώπων (που μπορεί να χαρακτηριστεί ως κακή, μέτρια,

καλή ή πολύ καλή), καθώς και το ενδιαφέρον των μαθητών για τη Στατιστική, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλό, μέτριο, χαμηλό ή μηδαμινό.

2. Σε **ποσοτικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:

- i) Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο “μεμονωμένες” τιμές. Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1, 2, ...), το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (με τιμές 1, 2, ..., 6) κτλ.
- ii) Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών  $(\alpha, \beta)$ . Τέτοιες μεταβλητές είναι το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ' Λυκείου, ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν στα θέματα μιας εξέτασης, η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης κτλ.

## Συλλογή Στατιστικών Δεδομένων

Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται **απογραφή** (census). Για παράδειγμα, η Στατιστική Υπηρεσία της χώρας μας (ΕΣΥΕ) κάνει κάθε 10 χρόνια απογραφή του πληθυσμού, η οποία αποτελεί κύρια πηγή δεδομένων δημογραφικού, οικονομικού, εμπορικού και βιομηχανικού χαρακτήρα. Η τελευταία απογραφή έγινε το 1991.

Σε πολλές όμως περιπτώσεις η εξέταση όλων των μονάδων του πληθυσμού είναι δύσκολη ή ακόμα και αδύνατη. Ένας υποψήφιος βουλευτής, για παράδειγμα, πριν από τις εκλογές είναι δύσκολο να εξετάσει όλους τους ψηφοφόρους, για να προσδιορίσει τι αντίληψη έχουν για τις θέσεις του. Επίσης ο κόπος, ο χρόνος και τα έξοδα που χρειάζονται για τη διεξαγωγή μιας απογραφής είναι πολλές φορές αρκετά μεγάλα, ιδίως όταν ο πληθυσμός που εξετάζεται είναι αρκετά μεγάλος. Εξάλλου ένας κατασκευαστής εκρηκτικών μηχανισμών ή ηλεκτρικών λυχνιών είναι αδύνατο να δοκιμάζει όλους τους παραγόμενους μηχανισμούς, για να ελέγχει την αποτελεσματικότητά τους, ή όλες τις παραγόμενες λυχνίες για να ελέγχει το χρόνο ζωής τους. Ομοίως ο γιατρός για να υπολογίσει την αποτελεσματικότητα ενός νέου φαρμάκου στην καταπολέμηση μιας ασθένειας είναι αδύνατο να περιμένει να δοκιμαστεί το φάρμακο σε όλα τα άτομα που πάσχουν από τη συγκεκριμένη ασθένεια. Όπου λοιπόν η απογραφή είναι δύσκολη, αδύνατη ή οικονομικά και χρονικά ασύμφορη, ο ερευνητής μαζεύει πληροφορίες από κάποια

μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού, το οποίο καλείται **δείγμα**. Κάνει τις παρατηρήσεις του στο δείγμα αυτό και μετά γενικεύει τα συμπεράσματά του για ολόκληρο τον πληθυσμό. Για συμπεράσματα όμως που θα προκύψουν από τη μελέτη του δείγματος θα είναι αξιόπιστα, θα ισχύουν δηλαδή με ικανοποιητική ακρίβεια για ολόκληρο τον πληθυσμό, αν η επιλογή του δείγματος γίνει με σωστό τρόπο, ώστε το δείγμα να είναι, όπως λέμε, **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού. Στην πράξη, ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.

Η επιλογή του αντιπροσωπευτικού δείγματος είναι “εκ των ων ουκ άνευ”. Αποτελεί πολύ σοβαρή και δύσκολη διαδικασία. Ο κακός σχεδιασμός και η εκτέλεση της στατιστικής έρευνας, η μη αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος, ο μη σωστός καθορισμός του μεγέθους του δείγματος αποτελούν μερικά βασικά μειονεκτήματα στη διαδικασία επιλογής ενός δείγματος. Από την άλλη πλευρά, στις απογραφές απαιτείται συνήθως μεγάλος αριθμός απογραφένων. Παρουσιάζεται έτσι η ανάγκη πρόσληψης και εκπαίδευσης μεγάλου αριθμού υπαλλήλων. Λόγω του μεγάλου χρόνου και κυρίως των σημαντικών εξόδων που απαιτούνται, πολλές φορές χρησιμοποιούνται ανεπαρκώς εκπαιδευμένοι απογραφείς με κίνδυνο να σημειώνονται λάθη οφειλόμενα σ’ αυτούς.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μία “προσεκτική” επιλογή μικρότερου δείγματος είναι δυνατόν να δώσει καλύτερα αποτελέσματα από ένα μεγαλύτερο δείγμα που δεν έχει εκλεγεί κατάλληλα. Ενδεικτικό είναι το παράδειγμα των προεδρικών εκλογών των ΗΠΑ το 1936. Το περιοδικό Literary Digest χρησιμοποιώντας δείγμα 2.400.000 ατόμων πρόβλεψε νίκη του Landon με ποσοστό 57%. Αντίθετα, το δημοσκοπικό γραφείο του G. Gallup χρησιμοποιώντας δείγμα 50.000 ατόμων πρόβλεψε το σωστό αποτέλεσμα που ήταν νίκη του Roosevelt με ποσοστό 62%! Η παταγώδης αποτυχία της δημοσκοπήσης του περιοδικού οφειλόταν στο γεγονός ότι το δείγμα που επελέγη δεν ήταν αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού.

Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της **Δειγματοληψίας (Sampling)**, που αποτελεί τη βάση της Στατιστικής. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι η οργάνωση της συλλογής και επεξεργασίας των σχετικών δεδομένων και πληροφοριών γίνεται κατά τρόπο που για δεδομένη ακρίβεια να επιτυγχάνεται το χαμηλότερο δυνατό κόστος ή, αντιστρόφως, να εξασφαλίζεται η μέγιστη δυνατή ακρίβεια την οποίαν επιτρέπουν τα μέσα που διαθέτουμε.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές; Από τις ποσοτικές ποιες είναι διακριτές και ποιες συνεχείς;
 

|                                   |                                    |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| α) Βάρος                          | στ) Τόπος καταγωγής                |
| β) Αριθμός τροχαίων ατυχημάτων    | ζ) Επάγγελμα                       |
| γ) Φύλο                           | η) Αριθμός παιδιών στην οικογένεια |
| δ) Οικογενειακή κατάσταση         | θ) Βαθμολογία στο σκάκι            |
| ε) Στάθμη της λίμνης του Μαραθώνα | ι) Νούμερο γυναικείων παπουτσιών.  |
  
2. Στις παρακάτω περιπτώσεις ποιες μπορεί να είναι οι μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν; Να γίνει η διάκρισή τους σε ποιοτικές ή ποσοτικές και να αναφερθούν μερικές δυνατές τιμές τους:
  - α) Εξετάζουμε ένα δείγμα υπαλλήλων μιας εταιρείας.
  - β) Εξετάζουμε ένα δείγμα προϊόντων από μια παραγωγή.
  - γ) Εξετάζουμε ένα δείγμα τηλεθεατών.
  - δ) Εξετάζουμε τους καλαθοσφαιριστές μιας ομάδας σε έναν αγώνα.
  
3. Για να βρούμε ποιες εκπομπές στην τηλεόραση έχουν τη μεγαλύτερη ακροαματικότητα αποφασίσαμε να πάρουμε δείγμα 500 τηλεθεατών. Ποιος είναι, κατά τη γνώμη σας, ο καλύτερος από τους παρακάτω τρόπους, για να πάρουμε το δείγμα; Είναι καλύτερο να πάρουμε:
  - α) μόνο άνδρες, β) μόνο γυναίκες, γ) άτομα από τις μεγάλες πόλεις
  - δ) άτομα μόνο από την επαρχία, ε) άτομα από διάφορες περιοχές.
  
4. Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα παρακάτω επιλεγόμενα δείγματα;
  - α) Για να βρούμε τα ποσοστά των ανδρών και των γυναικών στην Ελλάδα, πηγαίνουμε σε μια μεγάλη στρατιωτική μονάδα και ρωτάμε όλους τους στρατιώτες, πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες υπάρχουν στην οικογένειά τους.
  - β) Κάποιος θέλει να σχηματίσει μια ιδέα για το αποτέλεσμα των επερχόμενων βουλευτικών εκλογών. Τηλεφωνεί λοιπόν σε συγγενείς και φίλους του και τους ρωτάει σχετικά.
  - γ) Για να εκτιμήσουμε το κατά κεφαλή εισόδημα των Ελλήνων παίρνουμε ένα δείγμα από το Κολωνάκι των Αθηνών.
  - δ) Για να δούμε πώς διασκεδάζουν οι νέοι της χώρας μας επιλέγουμε κάποιους μαθητές από διάφορα Λύκεια της Αττικής.
  - ε) Ο διευθυντής ενός Λυκείου αποφάσισε να καταγράψει τους λόγους της απουσίας των μαθητών από το Λύκειο κατά τη διάρκεια της ακαδημαϊκής χρονιάς. Γι' αυτό τον λόγο πήρε ως δείγμα όσους απουσίασαν το Νοέμβριο.

## 2.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

### Στατιστικοί Πίνακες

Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων είναι αναγκαία η κατασκευή συνοπτικών **πινάκων** ή **γραφικών παραστάσεων**, ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους και η εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων. Η παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων σε πίνακες γίνεται με την κατάλληλη τοποθέτηση των πληροφοριών σε γραμμές και στήλες, με τρόπο που να διευκολύνεται η σύγκριση των στοιχείων και η καλύτερη ενημέρωση του αναγνώστη σχετικά με τη δομή του πληθυσμού που ερευνάμε.

Οι πίνακες διακρίνονται στους:

α) **γενικούς πίνακες**, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων,

β) **ειδικούς πίνακες**, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:

α) τον **τίτλο**, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,

β) τις **επικεφαλίδες** των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,

γ) το **κύριο σώμα** (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα,

δ) την **πηγή**, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ' αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

Παρακάτω δίνονται μερικοί στατιστικοί πίνακες, που διευκρινίζουν την εφαρμογή των προηγούμενων εννοιών.

**Πίνακας 1**

Πληθυσμός της Ελλάδος (σε εκατομμύρια) κατά μεγάλες ομάδες ηλικιών

| Ηλικία<br>(σε έτη) | Απογραφή<br>1971 | Απογραφή<br>1981 | Απογραφή<br>1991 | Εκτίμηση<br>1993 | Εκτίμηση<br>1994 |
|--------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 0-14               | 2,22             | 2,31             | 1,97             | 1,85             | 1,81             |
| 15-64              | 5,58             | 6,19             | 6,88             | 6,99             | 7,04             |
| ≥ 65               | 0,96             | 1,24             | 1,40             | 1,54             | 1,58             |

Πηγή: ΕΣΥΕ, 1996

## Πίνακας 2

Επιφάνεια και πληθυσμός των κατοικημένων νησιών της Ελλάδας με πληθυσμό, κατά την απογραφή του 1991, άνω των 10.000 κατοίκων.

| Κατοικημένες νήσοι | Επιφάνεια σε τ.χμ. | Πληθυσμός κατά τις απογραφές |         |         |
|--------------------|--------------------|------------------------------|---------|---------|
|                    |                    | 1971                         | 1981    | 1991    |
| Κρήτη              | 8.261,183          | 456.471                      | 502.082 | 539.938 |
| Εύβοια             | 3.661,637          | 162.986                      | 185.626 | 205.502 |
| Λέσβος             | 1.635,998          | 97.008                       | 88.601  | 87.151  |
| Ρόδος              | 1.401,459          | 66.606                       | 87.831  | 98.181  |
| Χίος               | 842,796            | 52.487                       | 48.700  | 51.060  |
| Κεφαλληνία         | 734,014            | 31.787                       | 27.649  | 29.392  |
| Κέρκυρα            | 585,312            | 89.578                       | 96.533  | 104.781 |
| Σάμος              | 477,942            | 32.664                       | 31.629  | 33.032  |
| Λήμνος             | 476,288            | 17.367                       | 15.721  | 17.645  |
| Ζάκυνθος           | 406,612            | 30.180                       | 30.011  | 32.556  |
| Νάξος              | 389,434            | 14.201                       | 14.037  | 14.838  |
| Θάσος              | 383,672            | 13.316                       | 13.111  | 13.527  |
| Λευκάδα            | 301,106            | 22.917                       | 19.947  | 19.350  |
| Κως                | 287,611            | 16.650                       | 20.350  | 26.379  |
| Κάλυμνος           | 110,581            | 13.097                       | 14.295  | 15.706  |
| Σαλαμίνα           | 91,503             | 23.065                       | 28.574  | 34.272  |
| Σύρος              | 84,069             | 18.642                       | 19.668  | 19.870  |
| Αίγινα             | 77,014             | 9.553                        | 11.127  | 11.639  |

Κ  
ρ  
η  
ν  
η  
ς

Πηγή: ΕΣΥΕ, Απογραφή 1991

## Πίνακας 3

Εργατικά ατυχήματα κατά ομάδες ηλικιών  
Έτη 1990-94

| Ηλικία      | 1990  | 1991  | 1992  | 1993  | 1994  |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Κάτω των 15 | 18    | 9     | 10    | 16    | 5     |
| 15-19       | 731   | 564   | 437   | 735   | 442   |
| 20-24       | 3323  | 2785  | 2755  | 2981  | 2696  |
| 25-29       | 4277  | 3921  | 4246  | 3881  | 3717  |
| 30-34       | 3952  | 3700  | 3388  | 3348  | 3282  |
| 35-39       | 3589  | 3146  | 3233  | 3230  | 3000  |
| 40-44       | 3237  | 2803  | 2911  | 2880  | 2903  |
| 45-49       | 2839  | 2593  | 2784  | 2608  | 2403  |
| 50-54       | 2727  | 2564  | 2286  | 2095  | 1877  |
| 55-59       | 2304  | 2230  | 2185  | 1699  | 1664  |
| 60-64       | 728   | 720   | 688   | 420   | 523   |
| 65-69       | 121   | 150   | 140   | 66    | 96    |
| Σύνολο      | 27846 | 25185 | 25063 | 23959 | 22608 |

Πηγή: ΙΚΑ, Ελληνικό Ινστιτούτο Υγιεινής και Ασφάλειας της Εργασίας

**Πίνακας 4**  
Χαρακτηριστικά 40 μαθητών Γ΄ τάξης ενός Λυκείου.

| α.α | Φύλο | Ασχολία * | Αριθμός αδελφών | Βαθμός μαθηματικών Β΄ λυκείου | Ύψος (cm) | Βάρος (Kg) | Ύψος πατέρα (cm) | Ύψος μητέρας (cm) |
|-----|------|-----------|-----------------|-------------------------------|-----------|------------|------------------|-------------------|
| 1   | Κ    | 4         | 1               | 15                            | 170       | 60         | 172              | 168               |
| 2   | Α    | 1         | 0               | 17                            | 180       | 68         | 185              | 165               |
| 3   | Κ    | 4         | 2               | 12                            | 178       | 62         | 181              | 160               |
| 4   | Κ    | 5         | 1               | 18                            | 165       | 47         | 180              | 162               |
| 5   | Κ    | 5         | 0               | 15                            | 170       | 54         | 180              | 168               |
| 6   | Κ    | 4         | 3               | 16                            | 168       | 56         | 185              | 168               |
| 7   | Κ    | 4         | 2               | 15                            | 175       | 58         | 193              | 162               |
| 8   | Α    | 4         | 1               | 15                            | 175       | 72         | 174              | 174               |
| 9   | Α    | 2         | 3               | 13                            | 173       | 67         | 182              | 160               |
| 10  | Κ    | 3         | 1               | 15                            | 162       | 50         | 176              | 170               |
| 11  | Κ    | 4         | 1               | 16                            | 160       | 51         | 176              | 164               |
| 12  | Α    | 2         | 1               | 11                            | 170       | 58         | 182              | 165               |
| 13  | Κ    | 7         | 3               | 20                            | 167       | 50         | 174              | 170               |
| 14  | Α    | 1         | 1               | 18                            | 177       | 81         | 177              | 169               |
| 15  | Α    | 1         | 0               | 17                            | 180       | 70         | 170              | 165               |
| 16  | Κ    | 2         | 2               | 19                            | 170       | 63         | 165              | 174               |
| 17  | Α    | 2         | 0               | 14                            | 182       | 71         | 176              | 173               |
| 18  | Α    | 7         | 2               | 17                            | 178       | 73         | 182              | 170               |
| 19  | Κ    | 4         | 1               | 14                            | 165       | 58         | 180              | 161               |
| 20  | Α    | 5         | 1               | 16                            | 178       | 74         | 173              | 168               |
| 21  | Κ    | 5         | 1               | 12                            | 156       | 44         | 170              | 158               |
| 22  | Κ    | 5         | 1               | 13                            | 175       | 53         | 170              | 165               |
| 23  | Α    | 5         | 2               | 18                            | 172       | 60         | 178              | 165               |
| 24  | Κ    | 6         | 1               | 16                            | 173       | 64         | 182              | 162               |
| 25  | Κ    | 6         | 2               | 14                            | 167       | 57         | 172              | 157               |
| 26  | Α    | 5         | 0               | 14                            | 187       | 85         | 185              | 170               |
| 27  | Κ    | 6         | 1               | 17                            | 170       | 62         | 180              | 165               |
| 28  | Α    | 3         | 1               | 12                            | 180       | 80         | 180              | 167               |
| 29  | Α    | 3         | 0               | 15                            | 178       | 73         | 173              | 170               |
| 30  | Α    | 2         | 1               | 10                            | 191       | 86         | 180              | 170               |
| 31  | Α    | 2         | 0               | 16                            | 176       | 65         | 180              | 172               |
| 32  | Κ    | 4         | 1               | 12                            | 169       | 57         | 170              | 167               |
| 33  | Κ    | 4         | 2               | 14                            | 167       | 61         | 179              | 158               |
| 34  | Κ    | 4         | 1               | 19                            | 166       | 62         | 178              | 165               |
| 35  | Α    | 3         | 1               | 19                            | 179       | 76         | 178              | 160               |
| 36  | Α    | 3         | 1               | 16                            | 178       | 68         | 180              | 160               |
| 37  | Α    | 5         | 1               | 19                            | 180       | 85         | 170              | 163               |
| 38  | Κ    | 5         | 1               | 19                            | 164       | 64         | 184              | 170               |
| 39  | Κ    | 3         | 0               | 15                            | 170       | 63         | 165              | 167               |
| 40  | Κ    | 4         | 1               | 15                            | 173       | 63         | 186              | 162               |

\*1: Υπολογιστές, 2:Αθλητισμός, 3:Διασκέδαση - Ντίσκο, 4:Μουσική,

5:Τηλεόραση -Κινηματογράφος, 6:Διάβασμα εξωσχολικών βιβλίων, 7:Άλλο

Πηγή: Δειγματοληπτική έρευνα μεταξύ μαθητών 1ου Λυκείου Αμαρουσίου (Σεπτ. '98).

## Πίνακες Κατανομής Συχνοτήτων

Ας υποθέσουμε ότι  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$ , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$ ,  $k \leq n$ . Στην τιμή  $x_i$  αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) **συχνότητα** (frequency)  $v_i$ , δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή  $x_i$  της εξεταζόμενης μεταβλητής  $X$  στο σύνολο των παρατηρήσεων. Είναι φανερό ότι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος  $n$  του δείγματος, δηλαδή:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = n \quad (1)$$

Για παράδειγμα, για τη μεταβλητή  $X$ : “αριθμός αδελφών” του πίνακα 4 οι συχνότητες για τις τιμές  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$  είναι, αντίστοιχα,  $v_1 = 8$ ,  $v_2 = 22$ ,  $v_3 = 7$ ,  $v_4 = 3$  με  $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 40$ . Ο υπολογισμός των συχνοτήτων γίνεται με τη **διαλογή** των παρατηρήσεων, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 5. Διατρέχοντας με τη σειρά τη λίστα των δεδομένων καταγράφουμε κάθε παρατήρηση με συμβολικό τρόπο σαν μια γραμμή “|” στην αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής.

**Πίνακας 5**

Κατανομή συχνοτήτων της μεταβλητής  $X$ : “αριθμός αδελφών” των μαθητών του πίνακα 4.

| Αριθμός<br>αδελφών<br>$x_i$ | Διαλογή | Συχνότητα<br>$v_i$ | Σχετική<br>Συχνότητα<br>$f_i$ | Σχετική<br>Συχνότητα<br>$f_i\%$ |
|-----------------------------|---------|--------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 0                           |         | 8                  | 0,200                         | 20,0                            |
| 1                           |         | 22                 | 0,550                         | 55,0                            |
| 2                           |         | 7                  | 0,175                         | 17,5                            |
| 3                           |         | 3                  | 0,075                         | 7,5                             |
| Σύνολο:                     |         | 40                 | 1,000                         | 100,0                           |

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα  $v_i$  με το μέγεθος  $n$  του δείγματος, προκύπτει η **σχετική συχνότητα** (relative frequency)  $f_i$  της τιμής  $x_i$ , δηλαδή

$$f_i = \frac{v_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

→ i)  $0 \leq f_i \leq 1$  για  $i = 1, 2, \dots, k$  αφού  $0 \leq v_i \leq n$ .

→ ii)  $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$ , αφού

**Απόδειξη**  $f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \dots + \frac{v_k}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$

**Σύμβαση**

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες  $f_i$  τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με  $f_i\%$ , δηλαδή  $f_i\% = 100f_i$ . Για παράδειγμα, οι σχετικές συχνότητες για τις τιμές  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$  της μεταβλητής  $X$ : “αριθμός αδελφών” είναι αντιστοίχως:

$$f_1 = \frac{8}{40} = 0,20, \quad f_2 = \frac{22}{40} = 0,55, \quad f_3 = \frac{7}{40} = 0,175 \quad \text{και} \quad f_4 = \frac{3}{40} = 0,075 \text{ με}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0,20 + 0,55 + 0,175 + 0,075 = 1.$$

Συνεπώς  $f_1\% = 20$ ,  $f_2\% = 55$ ,  $f_3\% = 17,5$  και  $f_4\% = 7,5$  με

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 100.$$

Οι ποσότητες  $x_i$ ,  $v_i$ ,  $f_i$  για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** ή απλά **πίνακας συχνοτήτων**.

Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών  $(x_i, v_i)$  λέμε ότι αποτελεί την **κατανομή συχνοτήτων** και το σύνολο των ζευγών  $(x_i, f_i)$ , ή των ζευγών  $(x_i, f_i\%)$ , την **κατανομή των σχετικών συχνοτήτων**. Στον πίνακα 5 παρουσιάζονται οι κατανομές συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων της μεταβλητής  $X$ : “αριθμός αδελφών” των μαθητών του πίνακα 4.

## Αθροιστικές Συχνότητες

Στην περίπτωση των **ποσοτικών μεταβλητών** εκτός από τις συχνότητες  $v_i$  και  $f_i$  χρησιμοποιούνται συνήθως και οι λεγόμενες **αθροιστικές συχνότητες** (cumulative frequencies)  $N_i$  και οι **αθροιστικές σχετικές συχνότητες** (cumulative relative frequencies)  $F_i$ , οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής  $x_i$ . Συχνά οι  $F_i$  πολλαπλασιάζονται επί 100 εκφραζόμενες έτσι επί τοις εκατό, δηλαδή  $F_i\% = 100F_i$ , βλέπε πίνακα 6. Αν οι τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_k$  μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής  $x_i$  είναι  $N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i$ . Όμοια, η αθροιστική σχετική συχνότητα είναι  $F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$ , για  $i = 1, 2, \dots, k$ . Για παράδειγμα, για τη μεταβλητή  $X$ : “αριθμός αδελφών” του πίνακα 4 είναι  $N_1 = v_1 = 8$ ,  $N_2 = v_1 + v_2 = 30$ ,  $N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 37$  και  $N_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 40$ , οπότε

$$F_1 = f_1 = 0,20, \quad F_2 = f_1 + f_2 = 0,75, \quad F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 0,925 \text{ και}$$

$$F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1, \text{ οπότε } F_1\% = 20, F_2\% = 75, F_3\% = 92,5 \text{ και}$$

$$F_4\% = 100. \text{ Είναι φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις:}$$

και

$$v_1 = N_1, v_2 = N_2 - N_1, \dots, v_k = N_k - N_{k-1}$$

$$f_1 = F_1, f_2 = F_2 - F_1, \dots, f_k = F_k - F_{k-1}.$$

### Πίνακας 6

Κατανομή συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων της μεταβλητής “αριθμός αδελφών” των μαθητών του πίνακα 4.

| Αριθμός<br>αδελφών<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | Σχετ.<br>Συχν.<br>$f_i$ | Σχετ.<br>Συχν.<br>$f_i \%$ | Αθροισ.<br>Συχν.<br>$N_i$ | Αθροιστική<br>Σχετ. Συχν.<br>$F_i$ | Αθροιστική<br>Σχετ. Συχν.<br>$F_i \%$ |
|-----------------------------|--------------------|-------------------------|----------------------------|---------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| 0                           | 8                  | 0,200                   | 20,0                       | 8                         | 0,200                              | 20,0                                  |
| 1                           | 22                 | 0,550                   | 55,0                       | 30                        | 0,750                              | 75,0                                  |
| 2                           | 7                  | 0,175                   | 17,5                       | 37                        | 0,925                              | 92,5                                  |
| 3                           | 3                  | 0,075                   | 7,5                        | 40                        | 1,000                              | 100,0                                 |
| Σύνολο:                     | 40                 | 1,000                   | 100,0                      | —                         | —                                  | —                                     |

### Γραφική Παράσταση Κατανομής Συχνοτήτων

ΟΚΙ

ΟΧΙ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΩΣ ΕΣΩ

Τα στατιστικά δεδομένα παρουσιάζονται πολλές φορές και υπό μορφή γραφικών παραστάσεων ή διαγραμμάτων. Οι γραφικές παραστάσεις παρέχουν πιο σαφή εικόνα του χαρακτηριστικού σε σχέση με τους πίνακες, είναι πολύ πιο ενδιαφέρουσες και ελκυστικές, χωρίς βέβαια να προσφέρουν περισσότερη πληροφορία από εκείνη που περιέχεται στους αντίστοιχους πίνακες συχνοτήτων. Επί πλέον με τα διαγράμματα διευκολύνεται η σύγκριση μεταξύ ομοειδών στοιχείων για το ίδιο ή για διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι γραφικής παρουσίασης, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που έχουμε. Όπως όμως οι στατιστικοί πίνακες έτσι και τα στατιστικά διαγράμματα πρέπει να συνοδεύονται από α) τον τίτλο, β) την κλίμακα με τις τιμές των μεγεθών που απεικονίζονται, γ) το υπόμνημα που επεξηγεί συνήθως τις τιμές της μεταβλητής και δ) την πηγή των δεδομένων.

#### α) Ραβδόγραμμα

Το **ραβδόγραμμα** (barchart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής  $X$  αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα. Έτσι έχουμε αντίστοιχα το **ραβδόγραμμα συχνοτήτων** και το **ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**. Τόσο η απόσταση μεταξύ των στηλών όσο και το μήκος

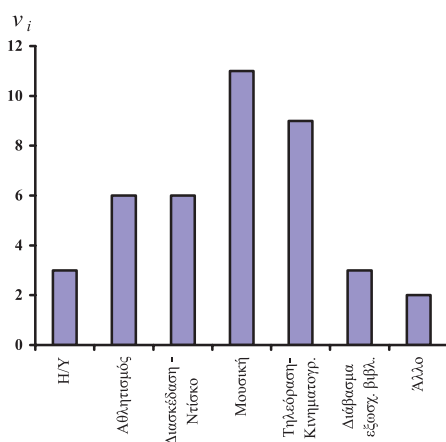
των βάσεων τους καθορίζονται αυθαίρετα. Στον πίνακα 7 έχουμε την κατανομή συχνοτήτων της μεταβλητής  $X$ : “απασχόληση στον ελεύθερο χρόνο” και στα σχήματα 1(α), (β) τα αντίστοιχα ραβδόγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

**Πίνακας 7**

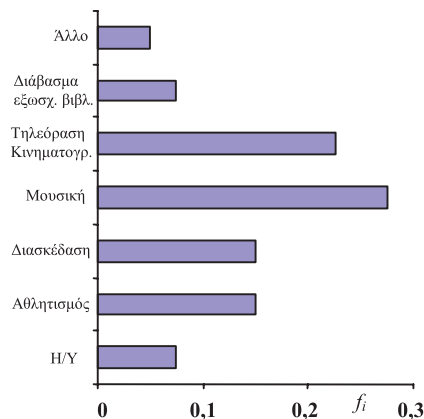
Κατανομή συχνοτήτων για την απασχόληση στον ελεύθερο χρόνο τους των μαθητών του πίνακα 4.

| $i$     | Απασχόληση<br>$x_i$      | Συχνότητα<br>$v_i$ | Σχετική<br>συχνότητα<br>$f_i$ | Σχετική<br>συχνότητα<br>$f_i\%$ |
|---------|--------------------------|--------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 1       | Υπολογιστές              | 3                  | 0,075                         | 7,5                             |
| 2       | Αθλητισμός               | 6                  | 0,150                         | 15,0                            |
| 3       | Διασκέδαση-ντίσκο        | 6                  | 0,150                         | 15,0                            |
| 4       | Μουσική                  | 11                 | 0,275                         | 27,5                            |
| 5       | Τηλεόραση-Κινηματογράφος | 9                  | 0,225                         | 22,5                            |
| 6       | Διάβασμα εξωσχ. Βιβλίων  | 3                  | 0,075                         | 7,5                             |
| 7       | Άλλο                     | 2                  | 0,050                         | 5,0                             |
| Σύνολο: |                          | 40                 | 1,000                         | 100,0                           |

Μερικές φορές σε ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων ο ρόλος των δύο αξόνων είναι δυνατόν να αντιστραφεί, όπως φαίνεται στο σχήμα 1(β), που παριστάνεται το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων της ίδιας μεταβλητής. Αν θέλουμε να συγκρίνουμε τον τρόπο που περνούν τον ελεύθερο χρόνο τους τα αγόρια και τα κορίτσια, τότε κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων του σχήματος 1(γ), όπως προκύπτει από τον πίνακα 4.

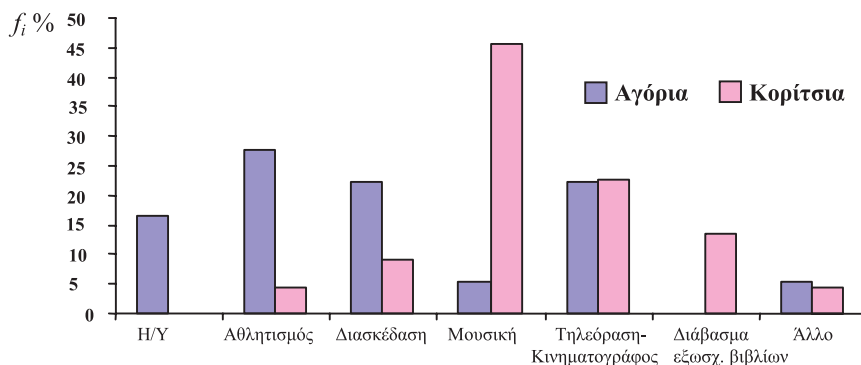


(α)



(β)

Ραβδόγραμμα συχνοτήτων (α) και σχετικών συχνοτήτων (β) για την απασχόληση των μαθητών του πίνακα 7.



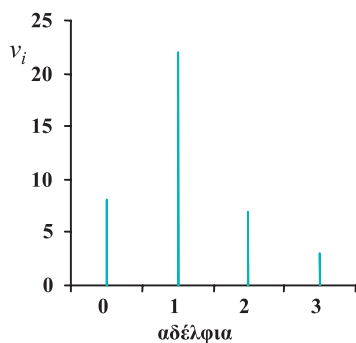
(γ)

Ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων για την απασχόληση των μαθητών του πίνακα 4 ανάλογα με το φύλο.

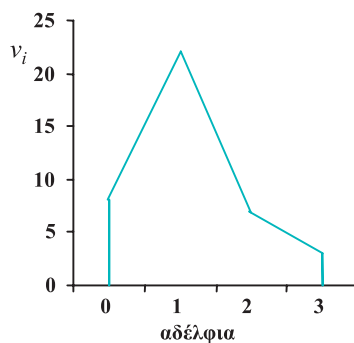
## β) Διάγραμμα Συχνοτήτων

Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων** (line diagram). Αυτό μοιάζει με το ραβδόγραμμα με μόνη διαφορά ότι αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια υψώνουμε σε κάθε  $x_i$  (υποθέτοντας ότι  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ ) μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2(α). Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων  $v_i$  στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες  $f_i$ , οπότε έχουμε το **διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων**.

Ενώνοντας τα σημεία  $(x_i, v_i)$  ή  $(x_i, f_i)$  έχουμε το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**, αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε, βλέπε σχήμα 2(β).



(α)



(β)

Διάγραμμα συχνοτήτων (α) και πολύγωνο συχνοτήτων (β) για τη μεταβλητή “αριθμός αδελφών” του πίνακα 4.

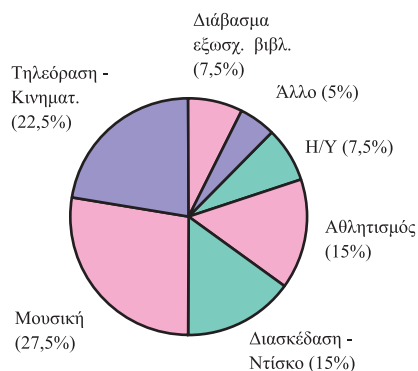
### γ) Κυκλικό Διάγραμμα

Το **κυκλικό διάγραμμα** (piechart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$  ή τις σχετικές συχνότητες  $f_i$  των τιμών  $x_i$  της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με  $\alpha_i$  το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε

$$\alpha_i = v_i \frac{360^\circ}{v} = 360^\circ f_i \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, \kappa.$$

Στο σχήμα 3 παριστάνεται το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων της “απασχόλησης των μαθητών” για τα δεδομένα του πίνακα 4.

Κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων της απασχόλησης των μαθητών για τα δεδομένα του πίνακα 4.



### δ) Σημειόγραμμα

Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα** (dot diagram), στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα. Στο σχήμα 4 έχουμε το σημειόγραμμα των χρόνων (σε λεπτά) 4, 2, 3, 1, 5, 6, 4, 2, 3, 4, 7, 4, 8, 6, 3 που χρειάστηκαν δεκαπέντε μαθητές, για να λύσουν ένα πρόβλημα.



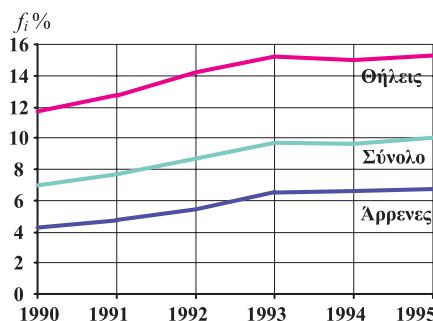
χρόνος (σε λεπτά)

## ε) Χρονόγραμμα

Το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής.

Στο σχήμα 5 έχουμε το χρονόγραμμα του ποσοστού ανεργίας στη χώρα μας από το 1990 έως το 1995. (Πηγή ΕΣΥΕ).

Παρατηρούμε ότι στο γυναικείο πληθυσμό υπάρχει συστηματικά μεγαλύτερο ποσοστό ανεργίας, γύρω στις 8 εκατοστιαίες μονάδες. Στο διάστημα 1993-95 το ποσοστό ανεργίας έχει σταθεροποιηθεί γύρω στο 6,5% για τους άνδρες και γύρω στο 15% για τις γυναίκες.



Ποσοστά ανεργίας στην Ελλάδα

## Ομαδοποίηση των Παρατηρήσεων

Οι πίνακες συχνότητων και κατ' αναλογία τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι δύσκολο να κατασκευαστούν, όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό μπορεί να συμβεί είτε στην περίπτωση μιας διακριτής μεταβλητής είτε, πολύ περισσότερο, στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, όπου αυτή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα ορισμού της. Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν (ομαδοποιηθούν) τα δεδομένα σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται και **κλάσεις** (class intervals), έτσι ώστε κάθε τιμή να ανήκει μόνο σε μία κλάση. Τα άκρα των κλάσεων καλούνται **όρια των κλάσεων** (class boundaries). Συνήθως υιοθετούμε την περίπτωση που μια κλάση περιέχει το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά) αλλά όχι το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά), δηλαδή που οι κλάσεις είναι της μορφής  $[ , )$ . Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται όμοιες, οπότε μπορούν να “αντιπροσωπευθούν” από τις **κεντρικές τιμές**, τα κέντρα δηλαδή κάθε κλάσης.

- Το πρώτο βήμα στην ομαδοποίηση των δεδομένων είναι η εκλογή του αριθμού  $k$  των ομάδων ή κλάσεων. Ο αριθμός αυτός συνήθως ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του. Γενικά όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός ο παρακάτω πίνακας:

| Μέγεθος δείγματος<br>$\nu$ | Αριθμός κλάσεων<br>$\kappa$ | Μέγεθος δείγματος<br>$\nu$ | Αριθμός κλάσεων<br>$\kappa$ |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| < 20                       | 5                           | 200 – 400                  | 9                           |
| 20 – 50                    | 6                           | 400 – 700                  | 10                          |
| 50 – 100                   | 7                           | 700 – 1000                 | 11                          |
| 100 – 200                  | 8                           | $\geq 1000$                | 12                          |

- Το δεύτερο βήμα είναι ο προσδιορισμός του πλάτους των κλάσεων. **Πλάτος μιας κλάσης** ονομάζεται η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης. Στην πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών οι κλάσεις έχουν το ίδιο πλάτος. Φυσικά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου επιβάλλεται οι κλάσεις να έχουν άνισο πλάτος, όπως, για παράδειγμα, στις κατανομές εισοδήματος, ημερών απεργίας κτλ. Για να κατασκευάσουμε ισοπλάτεις κλάσεις, χρησιμοποιούμε το **εύρος** (range)  $R$  του δείγματος, δηλαδή τη διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση του συνολικού δείγματος. Τότε υπολογίζουμε το πλάτος  $c$  των κλάσεων διαιρώντας το εύρος  $R$  διά του αριθμού των κλάσεων  $\kappa$ , στρογγυλεύοντας, αν χρειαστεί για λόγους διευκόλυνσης, πάντα προς τα πάνω.
- Το επόμενο βήμα είναι η κατασκευή των κλάσεων. Ξεκινώντας από την μικρότερη παρατήρηση, ή για πρακτικούς λόγους λίγο πιο κάτω από την μικρότερη παρατήρηση, και προσθέτοντας κάθε φορά το πλάτος  $c$  δημιουργούμε τις  $\kappa$  κλάσεις. Αυτονόητο είναι ότι η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος θα (πρέπει να) ανήκει οπωσδήποτε στην τελευταία κλάση.
- Τέλος, γίνεται η **διαλογή** των παρατηρήσεων. Το πλήθος των παρατηρήσεων  $\nu_i$  που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση  $i$  καλείται **συχνότητα της κλάσης** αυτής ή **συχνότητα της κεντρικής τιμής**  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \kappa$ .

Έστω, για παράδειγμα, ότι από τα δεδομένα του πίνακα 4 εξετάζουμε το ύψος των μαθητών. Το ύψος των μαθητών, όπως έχει καταγραφεί με τη σειρά, δίνεται στον παρακάτω πίνακα 8.

**Πίνακας 8**

Το ύψος (σε cm) των μαθητών της Γ' Λυκείου, όπως έχει καταγραφεί στον πίνακα 4. Σε αγκύλες έχουμε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή.

|       |     |     |     |     |     |     |     |     |       |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| 170   | 180 | 178 | 165 | 170 | 168 | 175 | 175 | 173 | 162   |
| 160   | 170 | 167 | 177 | 180 | 170 | 182 | 178 | 165 | 178   |
| [156] | 175 | 172 | 173 | 167 | 187 | 170 | 180 | 178 | [191] |
| 176   | 169 | 167 | 166 | 179 | 178 | 180 | 164 | 170 | 173   |

Παρατηρούμε ότι το εύρος του δείγματος είναι  $R = 191 - 156 = 35$ . Επειδή έχουμε  $\nu = 40$  παρατηρήσεις, χρησιμοποιούμε  $\kappa = 6$  κλάσεις. Το πλάτος των κλάσεων

είναι  $c = R / \kappa = 35 / 6 = 5,83 \approx 6$ . Αν θεωρήσουμε ως αρχή της πρώτης κλάσης το 156, θα έχουμε τον επόμενο πίνακα 9.

Πρέπει να προσεχτεί ότι:

- Καμία παρατήρηση δεν μπορεί να μείνει έξω από κάποια κλάση.
- Οι κεντρικές τιμές διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος των κλάσεων, που εδώ είναι ίσο με 6.
- Μία παρατήρηση που συμπίπτει με το άνω άκρο μιας κλάσης θα τοποθετηθεί κατά τη διαλογή στην αμέσως επόμενη κλάση. Για παράδειγμα, ο μαθητής με ύψος 180 θα τοποθετηθεί στην πέμπτη κλάση [180,186).

### Πίνακας 9

Κατανομές συχνοτήτων (απόλυτων, σχετικών, αθροιστικών) για τα δεδομένα του πίνακα 8.

| Κλάσεις<br>[ - ) | Κεντρικές<br>τιμές<br>$x_i$ | Διαλογή  | Συχν.<br>$n_i$ | Σχετική<br>Συχνότητα<br>$f_i \%$ | Αθρ.συχν.<br>$N_i$ | Αθρ. Σχετ.<br>Συχν.<br>$F_i \%$ |
|------------------|-----------------------------|----------|----------------|----------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| 156-162          | 159                         |          | 2              | 5,0                              | 2                  | 5,0                             |
| 162-168          | 165                         | ++++     | 8              | 20,0                             | 10                 | 25,0                            |
| 168-174          | 171                         | ++++ +++ | 12             | 30,0                             | 22                 | 55,0                            |
| 174-180          | 177                         | ++++ +++ | 11             | 27,5                             | 33                 | 82,5                            |
| 180-186          | 183                         | ++++     | 5              | 12,5                             | 38                 | 95,0                            |
| 186-192          | 189                         |          | 2              | 5,0                              | 40                 | 100,0                           |
|                  | Σύνολο                      | —        | 40             | 100                              | —                  | —                               |

## Ιστογράμμο Συχνοτήτων

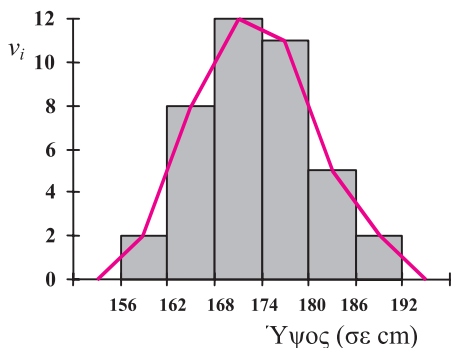
Η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το λεγόμενο **ιστόγραμμα** (histogram) συχνοτήτων. Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το **εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής**.

### α) Κλάσεις Ίσου Πλάτους

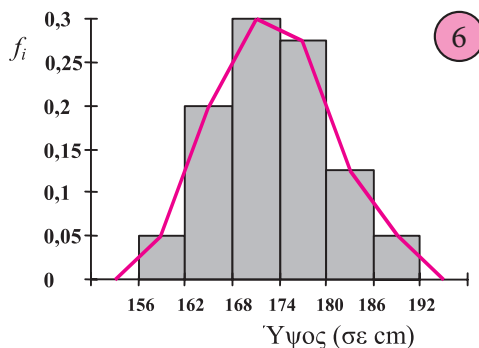
Θεωρώντας το πλάτος  $c$  ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, έτσι ώστε να ισχύει πάλι ότι το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι ίσο με τις αντίστοιχες συχνότητες. Επομένως, στον κατακόρυφο άξονα σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων βάζουμε τις συχνότητες. Με ανάλογο τρόπο κατασκευ-

άζεται και το **ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**, οπότε στον κάθετο άξονα βάζουμε τις σχετικές συχνότητες.

Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** (frequency polygon). Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος  $n$ . Όμοια κατασκευάζεται από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων** με εμβαδόν ίσο με 1, (βλέπε σχήμα 6).



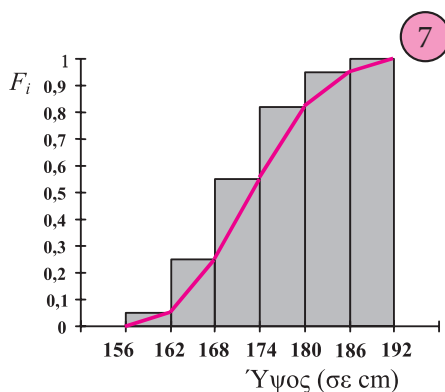
(α)



(β)

Ιστόγραμμα και πολύγωνο (α) συχνοτήτων και (β) σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και τα **ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων** και **αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων**. Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα **δεξιά άκρα** (όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** (ogive) της κατανομής. Στο σχήμα 7 παριστάνεται το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για το ύψος των μαθητών του πίνακα 9.



### β) Κλάσεις Ανισου Πλάτους

Όπως προαναφέραμε, συνήθως επιλέγουμε κλάσεις ίσου πλάτους. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που είναι απαραίτητο να έχουμε κλάσεις διαφορετικού

πλάτους όπως, για παράδειγμα, στην κατανάλωση νερού και ηλεκτρικού ρεύματος ή ακόμα και περιπτώσεις όπου οι συχνότητες σε κάποιες κλάσεις να είναι πολύ μικρές οπότε γίνεται συγχώνευση κλάσεων.

Έστω, για παράδειγμα, η διάρκεια (σε sec)  $v = 80$  τηλεφωνημάτων που έγιναν τυχαία από ένα κινητό τηλέφωνο, η οποία δίνεται στο διπλανό πίνακα συχνοτήτων.

Το αντίστοιχο ιστόγραμμα συχνοτήτων κατασκευάζεται πάλι, έτσι ώστε το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης. Άρα, αν  $c_i$  είναι το πλάτος της κλάσης  $i$  με συχνότητα  $v_i$ , το ύψος του ορθογωνίου θα είναι  $v_i = \frac{v_i}{c_i}$ ,  $i=1, 2, \dots, \kappa$ . Επομένως, για την κατασκευή του ιστογράμματος συχνοτήτων χρειαζόμαστε τα πλάτη των κλάσεων και τα ύψη των ορθογωνίων. Αυτά δίνονται στον επόμενο πίνακα.

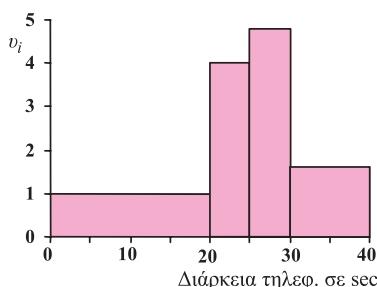
| Διάρκεια τηλεφ.<br>σε sec | Συχνότητα<br>$v_i$ |
|---------------------------|--------------------|
| 0-20                      | 20                 |
| 20-25                     | 20                 |
| 25-30                     | 24                 |
| 30-40                     | 16                 |
| Σύνολο                    | $v = 80$           |

ου θα είναι  $v_i = \frac{v_i}{c_i}$ ,  $i=1, 2, \dots, \kappa$ . Επομένως, για την κατασκευή του ιστογράμματος συχνοτήτων χρειαζόμαστε τα πλάτη των κλάσεων και τα ύψη των ορθογωνίων.

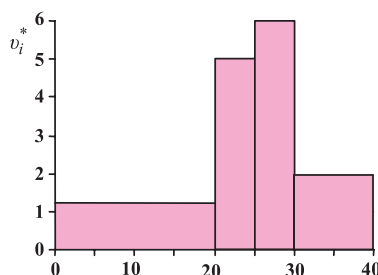
Αυτά δίνονται στον επόμενο πίνακα.

| Διάρκεια τηλεφ.<br>σε sec. | Πλάτος<br>κλάσης<br>$c_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | Ύψος<br>$v_i = \frac{v_i}{c_i}$ | Ύψος<br>$v_i^* = \frac{f_i \%}{c_i}$ |
|----------------------------|---------------------------|--------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| 0-20                       | 20                        | 20                 | 1,0                             | 1,25                                 |
| 20-25                      | 5                         | 20                 | 4,0                             | 5,00                                 |
| 25-30                      | 5                         | 24                 | 4,8                             | 6,00                                 |
| 30-40                      | 10                        | 16                 | 1,6                             | 2,00                                 |

Τότε το ιστόγραμμα συχνοτήτων δίνεται στο σχήμα 8(α). Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων είναι ίσο με το συνολικό μέγεθος δείγματος  $v$ , όπως δηλαδή συμβαίνει και στο ιστόγραμμα με κλάσεις ίσου πλάτους.



(α)



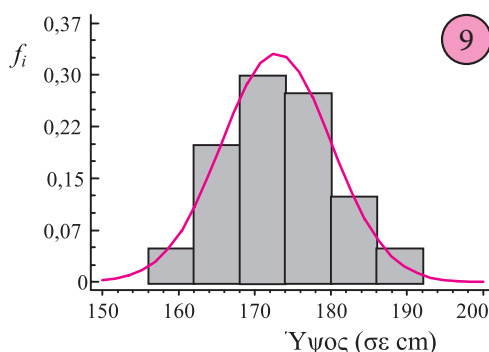
(β)

Ιστόγραμμα συχνοτήτων (α) και σχετικών συχνοτήτων (β)  
της διάρκειας τηλεφωνημάτων.

Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται και το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, (σχήμα 8(β)) αρκεί να χρησιμοποιήσουμε ως ύψος των ορθογωνίων το λόγο των σχετικών συχνοτήτων προς το πλάτος των κλάσεων, δηλαδή  $v_i^* = \frac{f_i \%}{c_i}$ .

## Καμπύλες Συχνοτήτων

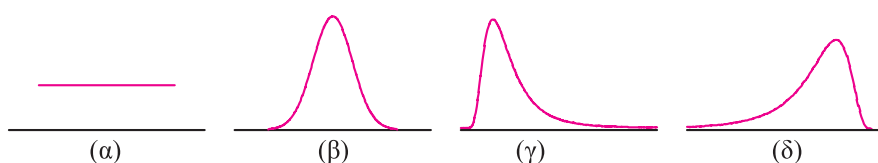
Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά



Καμπύλη συχνοτήτων για το ύψος των μαθητών του πίνακα 4

μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων** (frequency curve), όπως δείχνει το σχήμα 9. Οι καμπύλες συχνοτήτων έχουν μεγάλη εφαρμογή στη Στατιστική, όπου οι ιδιότητες τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

Η μορφή μιας κατανομής συχνοτήτων εξαρτάται από το πώς είναι κατανεμημένες οι παρατηρήσεις σε όλη την έκταση του εύρους τους. Μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων που συναντάμε συχνά στις εφαρμογές δίνονται στο σχήμα 10. Η κατανομή (β), με “κωδωνοειδή” μορφή λέγεται **κανονική κατανομή** (normal distribution) και παίζει σπουδαίο ρόλο στη Στατιστική. Όταν οι παρατηρήσεις “κατανέμονται” ομοιόμορφα σε ένα διάστημα  $[a, b]$ , όπως στην κατανομή (α), η κατανομή λέγεται **ομοιόμορφη**. Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, η κατανομή λέγεται ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία όπως στην κατανομή (γ) ή αρνητική ασυμμετρία όπως στην κατανομή (δ).



Μερικές χαρακτηριστικές κατανομές συχνοτήτων

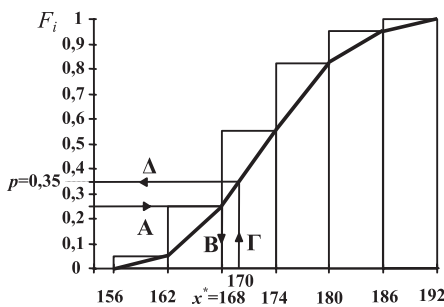
## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Από το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων του παρακάτω διαγράμματος να βρεθεί

- α) το ύψος  $x^*$ , κάτω από το οποίο ανήκει το 25% των μαθητών  
 β) το ποσοστό  $p$  των μαθητών που έχουν ύψος μέχρι και 170 cm.

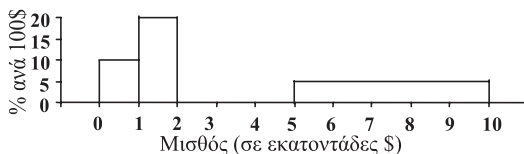
### ΛΥΣΗ

α) Ακολουθούμε τη διαδρομή  $AB$ , όπως φαίνεται στο διάγραμμα, και ξεκινώντας από το σημείο  $(0, 0,25)$  πηγαίνουμε παράλληλα προς τον άξονα  $Ox$  μέχρι το αθροιστικό διάγραμμα και μετά κάθετα στον άξονα  $Ox$  μέχρι το σημείο  $(x^*, 0)$ . Το  $x^* = 168$  είναι το ζητούμενο ύψος.



β) Όμοια, ακολουθώντας τη διαδρομή  $\Gamma\Delta$  από το σημείο  $(170, 0)$  καταλήγουμε, όπως φαίνεται στο σχήμα, στο σημείο  $(0, p)$ . Το  $p = 0,35 = 35\%$  είναι το ζητούμενο ποσοστό.

**2.** Στο διπλανό ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων σβήστηκε κατά λάθος το ορθογώνιο της κλάσης [2-5). Εάν είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει μισθός άνω των \$1000, να κατασκευάσετε το ορθογώνιο αυτό.

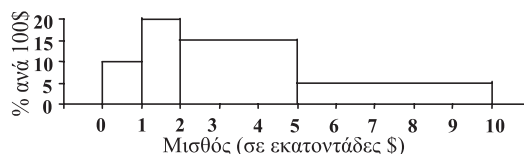


### ΛΥΣΗ

Επειδή έχουμε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ( $f_i\%$ ), το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων θα πρέπει να ισούται με 100. Το εμβαδόν του πρώτου ορθογωνίου είναι  $E_1 = (1-0) \cdot 10 = 10$ , του δεύτερου ορθογωνίου  $E_2 = (2-1) \cdot 20 = 20$ , και του τέταρτου  $E_4 = (10-5) \cdot 5 = 25$ . Άρα, το εμβαδόν του τρίτου ορθογωνίου θα είναι

$$E_3 = 100 - (10 + 20 + 25) = 45.$$

Επειδή το πλάτος του ορθογωνίου είναι  $5 - 2 = 3$ , το ύψος του θα είναι  $45 / 3 = 15$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η βαθμολογία 50 φοιτητών στις εξετάσεις ενός μαθήματος είναι:

|   |   |   |   |    |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|----|---|---|---|---|----|
| 3 | 4 | 5 | 8 | 9  | 7 | 6 | 8 | 7 | 10 |
| 8 | 7 | 6 | 5 | 9  | 3 | 8 | 5 | 6 | 6  |
| 6 | 3 | 5 | 6 | 4  | 2 | 9 | 8 | 7 | 7  |
| 1 | 6 | 3 | 1 | 5  | 8 | 1 | 2 | 3 | 4  |
| 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5  |

- α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (απολύτων και αθροιστικών).  
 β) Από τον πίνακα αυτό να εκτιμήσετε το ποσοστό των φοιτητών που πήραν βαθμό i) κάτω από τη βάση (μικρότερο του 5) ii) άριστα (9 ή 10) iii) τουλάχιστον 7 αλλά το πολύ 9.
2. Οι παραπάνω φοιτητές ήταν αντίστοιχα αγόρια (Α) ή κορίτσια (Κ):

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | K | A | K | A | A | A | K | K |
| K | K | A | A | A | K | A | K | A | A |
| A | A | A | A | K | K | A | K | A | K |
| K | K | K | A | K | K | A | A | A | A |
| A | A | K | A | K | K | A | A | A | K |

Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα χρησιμοποιώντας απόλυτες συχνότητες.

| Φύλο   | Βαθμολογία |    | Σύνολο |
|--------|------------|----|--------|
|        | ≤5         | >5 |        |
| A      |            |    |        |
| K      |            |    |        |
| Σύνολο |            |    |        |

3. Να μετατρέψετε τον προηγούμενο πίνακα συχνοτήτων της άσκησης 2 σε πίνακα σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό:
- α) ως προς το σύνολο των φοιτητών  
 β) ως προς το φύλο (γραμμές)  
 γ) ως προς τη βαθμολογία (στήλες)  
 και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

4. Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων, που δίνει την κατανομή του αριθμού των ημερών απουσίας από την εργασία τους λόγω ασθένειας 50 εργατών, να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των εργατών που απουσίασαν:

α) τουλάχιστον 1 ημέρα

β) πάνω από 5 ημέρες

γ) από 3 έως 5 ημέρες

δ) το πολύ 5 ημέρες

ε) ακριβώς 5 ημέρες.

| Αριθμός ημερών | Συχνότητα | Αριθμός ημερών | Συχνότητα |
|----------------|-----------|----------------|-----------|
| 0              | 12        | 5              | 8         |
| 1              | 8         | 6              | 0         |
| 2              | 5         | 7              | 5         |
| 3              | 4         | 8              | 2         |
| 4              | 5         | 9              | 1         |

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

| $x_i$  | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ | $f_i \%$ | $F_i \%$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| 1      | 4     | 0,20  | 6     | 0,60  | 25       | 10       |
| 2      |       |       |       |       |          |          |
| 3      |       |       |       |       |          |          |
| 4      |       |       |       |       |          |          |
| 5      | 2     |       |       |       |          |          |
| 6      |       |       |       |       |          |          |
| Σύνολο |       |       |       |       |          |          |

6. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων του βαθμού Μαθηματικών για τα αγόρια και κορίτσια (χωριστά) του πίνακα 4.
7. Τα δημοφιλέστερα ξένα μουσικά συγκροτήματα των 18 αγοριών του πίνακα 4 ήταν:  
Metallica, Iron Maiden, Άλλο, Scorpions, Oasis, Άλλο, Άλλο, Rolling Stones, Metallica, Metallica, Rolling Stones, Metallica, Iron Maiden, Iron Maiden, Scorpions, Scorpions, Scorpions, Metallica.  
Να κατασκευάσετε α) το ραβδόγραμμα και β) το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
8. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται η βαθμολογία των 450 μαθητών ενός Γυμνασίου σε τέσσερις κατηγορίες “Άριστα”, “Λίαν Καλώς”, “Καλώς” και “Σχεδόν Καλώς”. Το 30% των μαθητών έχουν επίδοση “Λίαν Καλώς”. Η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση “Καλώς” είναι  $144^\circ$ . Οι μαθητές με βαθμό “Σχεδόν Καλώς” είναι διπλάσιοι των μαθητών με “Άριστα”. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων. Πόσοι μαθητές έχουν επίδοση τουλάχιστον λίαν καλώς;

9. Από το 1960 έως το 1998 (Πρωταθλήματα Α΄ Εθνικής) ο Παναθηναϊκός έχει κατακτήσει 15 τίτλους, ο Ολυμπιακός 12, η ΑΕΚ 9, ο ΠΑΟΚ 2 και η Λάρισα 1. Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα και το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
10. Παρακάτω δίνονται τα μετάλλια που πήραν μερικές χώρες στο 17ο Ευρωπαϊκό Πρωτάθλημα Στίβου, το 1998. Να παρασταθούν τα δεδομένα αυτά σε ένα ραβδόγραμμα.

| Χώρα        | Χρυσά | Ασημένια | Χάλκινα |
|-------------|-------|----------|---------|
| Μ. Βρετανία | 9     | 4        | 3       |
| Γερμανία    | 8     | 7        | 8       |
| Ρωσία       | 6     | 9        | 7       |
| Πολωνία     | 3     | 4        | 1       |
| Ρουμανία    | 3     | 2        | 2       |
| Ουκρανία    | 3     | 2        | 1       |
| Ιταλία      | 2     | 4        | 3       |
| Πορτογαλία  | 2     | 3        | 1       |
| Ισπανία     | 2     | 1        | 4       |
| Γαλλία      | 2     | 1        | 1       |
| Ελλάδα      | 1     | 0        | 2       |

11. Τα κρούσματα δύο λοιμωδών νόσων από το 1987 έως το 1997 δίνονται στο διπλανό πίνακα. (Πηγή: ΕΚΕΠΑΠ.) Να κατασκευάσετε τα αντίστοιχα χρονογράμματα και να τα σχολιάσετε.

| Έτος | Έρπης ζωστήρ | Ηπατίτιδα Α |
|------|--------------|-------------|
| 1987 | 85           | 351         |
| 1988 | 58           | 254         |
| 1989 | 123          | 273         |
| 1990 | 178          | 172         |
| 1991 | 134          | 213         |
| 1992 | 201          | 127         |
| 1993 | 241          | 123         |
| 1994 | 252          | 259         |
| 1995 | 338          | 295         |
| 1996 | 296          | 107         |
| 1997 | 256          | 131         |

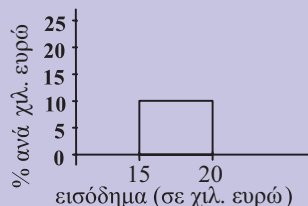
12. Τα παρακάτω δεδομένα αντιπροσωπεύουν την επίδοση 50 υποψηφίων για την πρόσληψή τους σε μια ιδιωτική σχολή (κλίμακα 0-10).

6 7 8 5 1 4 7 3 9 9 2 5 3 8 6 7 7 6 8 1 3 0 1 4 9  
0 9 7 8 6 1 2 3 5 4 6 6 4 3 2 8 8 7 7 6 5 5 9 2 4

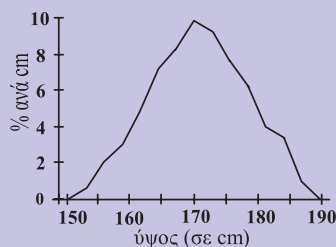
- α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.  
β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

- γ) Αν η σχολή θελήσει να πάρει όσους είχαν επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 8, πόσους θα πάρει;  
 δ) Αν η σχολή πάρει μόνο το 36% των υποψηφίων, τι επίδοση πρέπει να έχει κάποιος για να επιλεγεί;

13. Δίπλα δίνεται μόνο ένα ορθογώνιο από το ιστόγραμμα του ετήσιου εισοδήματος των οικογενειών μιας περιοχής. Τι ποσοστό οικογενειών της περιοχής είχαν εισόδημα 15.000 ευρώ έως 20.000 ευρώ;



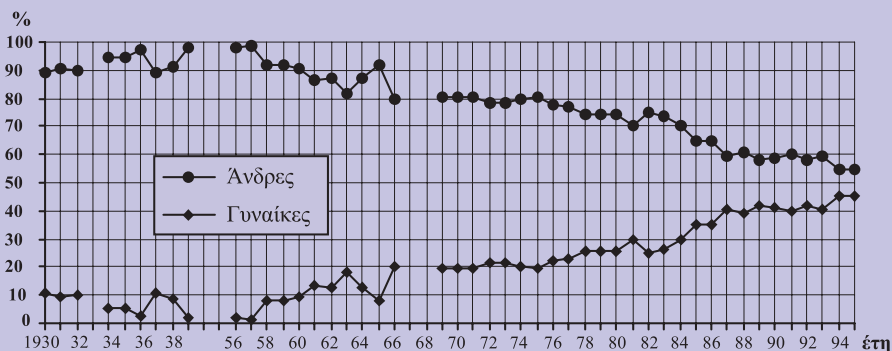
14. Ένας μαθητής έκανε το διπλανό πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων για το ύψος των αγοριών της τάξης του και ο καθηγητής το διέγραψε σαν λάθος. Είχε δίκιο ο καθηγητής;



### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κατασκευάσετε τα αντίστοιχα χρονογράμματα για τον πληθυσμό των νησιών α) Λέσβου, β) Θάσου, γ) Σαλαμίνας με βάση τα δεδομένα του πίνακα 2. Τι συμπέρασμα συνάγετε;
2. Οι βεβαιωθέντες θάνατοι από χρήση ναρκωτικών κατά τα έτη 1988-1998 (για το 1998 έως 8 Απριλίου) σύμφωνα με τον Οργανισμό κατά των Ναρκωτικών (ΟΚΑΝΑ) ήταν 62, 72, 66, 79, 79, 78, 146, 176, 222, 222 και 65 αντίστοιχα. Από αυτούς είχαμε 7, 4, 2, 2, 1, 4, 8, 7, 14, 22 και 6 μέχρι και 20 ετών, 43, 51, 34, 44, 47, 49, 71, 90, 98, 99 και 33 από 21-30 ετών και οι υπόλοιποι ήσαν άνω των 30 ετών.  
 Να παρασταθούν τα δεδομένα αυτά σε μορφή πίνακα.
3. Να παρασταθούν τα παραπάνω δεδομένα της άσκησης 2 σε μορφή πίνακα αναφορικά με το έτος και το φύλο των ατόμων, αν γνωρίζουμε ότι από τους βεβαιωθέντες θανάτους από χρήση ναρκωτικών κατά τα έτη 1988-1998 οι 8, 10, 7, 5, 9, 8, 11, 14, 20, 20 και 9 αντίστοιχα ήταν γυναίκες.
4. Το παρακάτω χρονόγραμμα δίνει τη σχετική συχνότητα των νέων πτυχιούχων Μαθηματικών σε όλη την Ελλάδα από το 1930 έως το 1995 ανάλογα με το φύλο. α) Μελετώντας προσεκτικά το χρονόγραμμα αυτό ποια συμπεράσματα εξάγονται; β) Ο συνολικός αριθμός νέων πτυχιούχων

Μαθηματικών το έτος 1995 ήταν 789. Πόσες ήταν οι γυναίκες και πόσοι οι άνδρες; γ) Ο αριθμός των γυναικών που έγιναν πτυχιούχοι Μαθηματικών το έτος 1974 ήταν 173. Πόσοι ήταν οι άνδρες που έγιναν πτυχιούχοι Μαθηματικοί το ίδιο έτος; δ) Πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες πήραν πτυχίο Μαθηματικών στην Ελλάδα το 1985;



5. Να δοθεί και να ερμηνευτεί το χρονόγραμμα των δεδομένων του πίνακα 1 για κάθε ομάδα ηλικιών.
6. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων της συστολικής πίεσης 150 γυναικών ηλικίας 17-24 ετών που χρησιμοποιούν το φάρμακο Α για κάποια πάθηση και 200 γυναικών, ανάλογης ηλικίας, που χρησιμοποιούν το φάρμακο Β.
- α) Να συγκρίνετε τα ποσοστά γυναικών που παίρνουν τα φάρμακα Α και Β και έχουν συστολική πίεση μεγαλύτερη ή ίση των 130 mm Hg
- β) Να κατασκευάσετε τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, χρησιμοποιώντας τους ίδιους άξονες συντεταγμένων.

| Συστολική πίεση<br>(σε mm Hg) | Φάρμακο Α | Φάρμακο Β |
|-------------------------------|-----------|-----------|
|                               | $v_i$     | $v_i$     |
| 95-99                         | 6         | 4         |
| 100-104                       | 15        | 14        |
| 105-109                       | 16        | 18        |
| 110-114                       | 22        | 24        |
| 115-119                       | 30        | 32        |
| 120-124                       | 20        | 28        |
| 125-129                       | 15        | 28        |
| 130-134                       | 12        | 26        |
| 135-139                       | 6         | 12        |
| 140-144                       | 5         | 8         |
| 145-149                       | 3         | 6         |
| Σύνολο                        | 150       | 200       |

Πηγή: Υποθετικά δεδομένα

7. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 55 μαθητές να λύσουν ένα πρόβλημα δίνονται παρακάτω:

3,4 13,2 6,7 1,4 1,3 3,8 3,9 2,9 13,8 3,9 2,7  
 4,4 3,6 1,4 2,4 3,6 3,1 7,5 6,9 7,8 12,7 3,9  
 3,3 9,7 2,0 4,4 3,3 8,7 3,9 11,6 5,6 9,0 3,4  
 1,4 3,5 2,8 10,4 11,9 12,3 2,9 2,8 1,5 4,1 5,9  
 3,1 8,7 2,8 3,8 13,0 3,0 6,4 3,2 5,9 7,0 8,2

- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κατάλληλο αριθμό κλάσεων.  
 β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις συχνότητες  $n_i$ ,  $f_i\%$ ,  $N_i$ ,  $F_i\%$ .  
 γ) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

## 2.3 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

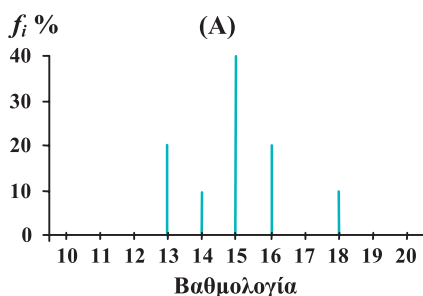
### Εισαγωγή

Εκτός από τους στατιστικούς πίνακες και τα διαγράμματα υπάρχουν και αριθμητικά μέτρα με τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε με συντομία μια κατανομή συχνοτήτων. Η γνώση των μέτρων αυτών διευκολύνει και την παραπέρα στατιστική επεξεργασία των δεδομένων. Έστω, για παράδειγμα, ένας καθηγητής ο οποίος, για να συγκρίνει δύο διαφορετικά τμήματα  $A$  και  $B$  της ίδιας τάξης ως προς την επίδοσή τους σε ένα μάθημα, πήρε τυχαία 10 μαθητές από κάθε τμήμα. Η βαθμολογία τους στο μάθημα αυτό ήταν:

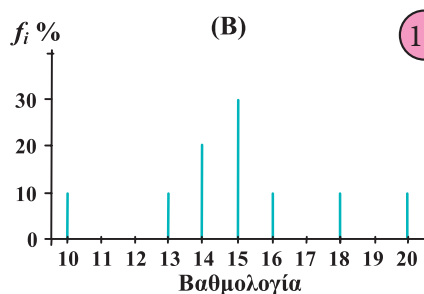
Τμήμα  $A$ : 13 13 14 15 15 15 15 16 16 18

Τμήμα  $B$ : 10 13 14 14 15 15 15 16 18 20.

Τα διαγράμματα σχετικών συχνοτήτων δίνονται στα σχήματα 11(α), (β).



(α)



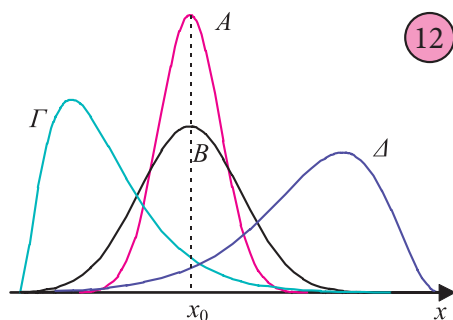
(β)

Παρατηρούμε ότι η βαθμολογία και των δύο τμημάτων είναι συγκεντρωμένη

γύρω στο 15, αλλά το δεύτερο τμήμα παρουσιάζει μεγαλύτερη διασπορά βαθμών από το πρώτο. Δηλαδή, οι βαθμοί του Β' τμήματος είναι περισσότερο διασκορπισμένοι γύρω από μια “κεντρική” τιμή. Οι έννοιες “κεντρική τιμή” και “διασπορά των παρατηρήσεων” μας δίνουν το ερέθισμα για έναν ακόμα πιο σύντομο τρόπο περιγραφής της κατανομής ενός συνόλου δεδομένων. Για να ορίσουμε δηλαδή κάποια **μέτρα** (αριθμητικά μεγέθη), που να μας δίνουν α) τη θέση του “κέντρου” των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και β) τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το “κέντρο” τους. Τα πρώτα τα καλούμε **μέτρα θέσης** της κατανομής (location measures), ενώ τα δεύτερα **μέτρα διασποράς** ή **μέτρα μεταβλητότητας** (measures of variability).

Εκτός από τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής πολλές φορές είναι απαραίτητος και ο προσδιορισμός κάποιων άλλων μέτρων, που καθορίζουν τη **μορφή** της κατανομής. Κατά πόσο δηλαδή η αντίστοιχη καμπύλη συχνοτήτων είναι συμμετρική ή όχι ως προς την ευθεία  $x = x_0$ , για δεδομένο σημείο  $x_0$  του άξονα  $Ox$ . Τα μέτρα αυτά, που συνήθως εκφράζονται σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης και διασποράς, καλούνται **μέτρα ασυμμετρίας** (measures of skewness).

Υπολογίζοντας από ένα σύνολο δεδομένων κάποια από τα ανωτέρω μέτρα, μπορούμε να έχουμε μια σύντομη περιγραφή της μορφής της καμπύλης συχνοτήτων. Στο σχήμα 12 οι καμπύλες συχνοτήτων  $A$  και  $B$  είναι συμμετρικές με το ίδιο “κέντρο”  $x_0$ , αλλά η  $B$  έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από την  $A$ . Οι καμπύλες  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι ασύμμετρες, με τη  $\Gamma$  όπως λέμε να παρουσιάζει θετική ασυμμετρία και τη  $\Delta$  αρνητική ασυμμετρία. Το “κέντρο” της  $\Gamma$  είναι αριστερότερα του  $x_0$ , ενώ της  $\Delta$  είναι δεξιότερα του  $x_0$ . Η  $\Delta$  παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από τη  $\Gamma$ .



## Μέτρα Θέσης

Τα πιο συνηθισμένα μέτρα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης ενός συνόλου δεδομένων πάνω στον οριζόντιο άξονα  $Ox$ , εκφράζοντας την “κατά μέσο όρο” απόστασή τους από την αρχή των αξόνων, είναι ο αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή (arithmetic mean or average), η διάμεσος (median) και η κορυφή ή επικρατούσα τιμή (mode).

### α) Μέση Τιμή ( $\bar{x}$ )

Η μέση τιμή ενός συνόλου  $n$  παρατηρήσεων αποτελεί το σπουδαιότερο και χρησιμότερο μέτρο της Στατιστικής και ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων.

Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  είναι  $t_1, t_2, \dots, t_n$  τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με  $\bar{x}$  και δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (1)$$

όπου το σύμβολο  $\sum_{i=1}^n t_i$  παριστάνει μια συντομογραφία του αθροίσματος

$t_1 + t_2 + \dots + t_n$  και διαβάζεται “άθροισμα των  $t_i$  από  $i=1$  έως  $n$ ”. Συχνά, όταν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης, συμβολίζεται και ως  $\sum t_i$  ή ακόμα πιο απλά με  $\sum t$ .

Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές της μεταβλητής  $X$  με συχνότητες  $v_1, v_2, \dots, v_k$  αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}{v_1 + v_2 + \dots + v_k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i v_i \quad (2)$$

Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \frac{v_i}{n} = \sum_{i=1}^k x_i f_i$$

όπου  $f_i$  οι σχετικές συχνότητες.

Για παράδειγμα, η μέση επίδοση των μαθητών στο τμήμα  $A$  θα είναι σύμφωνα με την (1)

$$\bar{x}_A = \frac{13 + 13 + 14 + \dots + 18}{10} = \frac{150}{10} = 15$$

ή ισοδύναμα από τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων σύμφωνα με την (2).

| Βαθμός<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | $x_i v_i$              |
|-----------------|--------------------|------------------------|
| 13              | 2                  | 26                     |
| 14              | 1                  | 14                     |
| 15              | 4                  | 60                     |
| 16              | 2                  | 32                     |
| 18              | 1                  | 18                     |
| Σύνολο          | $v_A = 10$         | $\Sigma x_i v_i = 150$ |

$$\bar{x}_A = \frac{\sum x_i v_i}{v_A} = \frac{150}{10} = 15.$$

Ομοίως, υπολογίζεται και η μέση επίδοση για το τμήμα Β, η οποία είναι πάλι

$$\bar{x}_B = 15.$$

Επίσης, το μέσο ύψος των 40 μαθητών της Γ' Λυκείου του πίνακα 8, σύμφωνα με τη σχέση (1) είναι  $\bar{x} = \frac{6918}{40} = 172,95$  cm.

Για ευκολότερο όμως υπολογισμό χρησιμοποιούμε τον πίνακα συχνοτήτων, όπως αυτός δίνεται παρακάτω, ομαδοποιώντας τα δεδομένα σε  $k = 6$  κλάσεις.

Αν  $x_i$  είναι το κέντρο της  $i$  κλάσης και  $v_i$  η αντίστοιχη συχνότητα, τότε σύμφωνα με τη σχέση (2) η μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{6930}{40} = 173,25 \text{ cm.}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μέσες τιμές του ίδιου συνόλου δεδομένων δεν είναι ακριβώς οι ίδιες. Πού οφείλεται αυτή η, έστω και μικρή, διαφορά;

Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την ομαδοποίηση υποθέσαμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες και ότι οι τιμές της μεταβλητής σε κάθε κλάση εκπροσωπούνται από την αντίστοιχη κεντρική

| Ύψος<br>σε cm | Κεντρικές<br>τιμές<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | $x_i v_i$               |
|---------------|-----------------------------|--------------------|-------------------------|
| 156-162       | 159                         | 2                  | 318                     |
| 162-168       | 165                         | 8                  | 1320                    |
| 168-174       | 171                         | 12                 | 2025                    |
| 174-180       | 177                         | 11                 | 1947                    |
| 180-186       | 183                         | 5                  | 915                     |
| 186-192       | 189                         | 2                  | 378                     |
|               | Σύνολο                      | $\Sigma v_i = 40$  | $\Sigma x_i v_i = 6930$ |

τιμή  $x_i$ . Η υπόθεση αυτή σημαίνει απώλεια πληροφοριών για τις αρχικές τιμές. Χάνουμε λοιπόν λίγο ως προς την ακρίβεια κερδίζουμε όμως χρόνο!

## β) Σταθμικός Μέσος

Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα (έμφαση) στις τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο** (weighted mean). Εάν

σε κάθε τιμή  $x_1, x_2, \dots, x_v$  δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας)  $w_1, w_2, \dots, w_v$ , τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i w_i}{\sum_{i=1}^v w_i}.$$

Για παράδειγμα, με το νέο σύστημα, για την εισαγωγή ενός μαθητή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση θα συνυπολογίζονται ο βαθμός  $x_1$  του απολυτηρίου του Ενιαίου Λυκείου με συντελεστή (βάρος)  $w_1 = 7,5$ , ο βαθμός  $x_2$  στο τεστ δεξιοτήτων με συντελεστή  $w_2 = 1$ , ο βαθμός  $x_3$  στο 1ο βασικό μάθημα με συντελεστή  $w_3 = 1$  και ο βαθμός  $x_4$  στο 2ο βασικό μάθημα με συντελεστή  $w_4 = 0,5$ . Εάν ένας μαθητής πάρει τους βαθμούς  $x_1 = 16,5$ ,  $x_2 = 18$ ,  $x_3 = 17$  και  $x_4 = 16,6$ , τότε ο σταθμικός μέσος της επίδοσης του θα είναι:

$$\bar{x} = \frac{16,5 \times 7,5 + 18 \times 1 + 17 \times 1 + 16,6 \times 0,5}{7,5 + 1 + 1 + 0,5} = \frac{167}{10} = 16,7.$$

### γ) Διάμεσος (δ)

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 9 μαθητές, για να λύσουν ένα πρόβλημα είναι: 3, 5, 5, 36, 6, 7, 4, 7, 8 με μέση τιμή  $\bar{x} = 9$ . Παρατηρούμε όμως ότι οι οκτώ από τις εννέα παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 9 και μία (ακραία τιμή), η οποία επηρεάζει και τη μέση τιμή είναι, αρκετά μεγαλύτερη του 9. Αυτό σημαίνει ότι η μέση τιμή δεν ενδείκνυται ως μέτρο θέσης (“κέντρο”) των παρατηρήσεων αυτών. Αντίθετα, ένα άλλο μέτρο θέσης που δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις είναι η **διάμεσος** (median), η οποία ορίζεται ως εξής:

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το  $n$  είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το  $n$  είναι άρτιος αριθμός.

Για παράδειγμα, για να βρούμε τη διάμεσο των δεδομένων:

α) 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9

β) 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9, 9

εργαζόμαστε ως εξής:

α) Έχουμε  $n = 13$  παρατηρήσεις, οι οποίες σε αύξουσα σειρά είναι:

0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9.

Άρα, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση (έβδομη στη σειρά),  $\delta = 4$ .

β) Έχουμε  $n = 14$  παρατηρήσεις οι οποίες σε αύξουσα σειρά είναι:

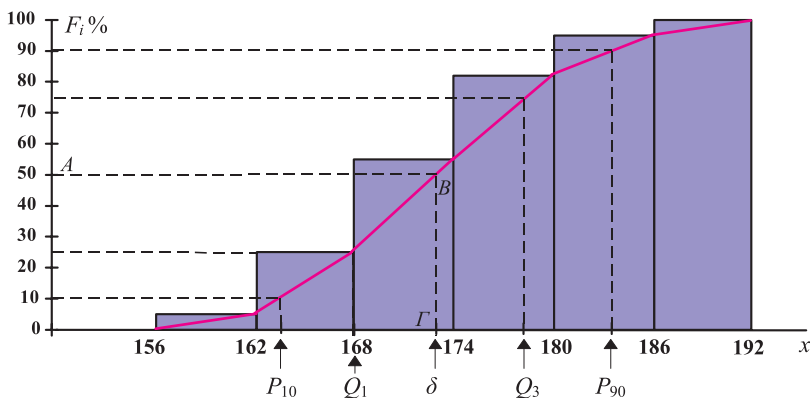
0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9 9.

Άρα, η διάμεσος είναι το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων (της έβδομης και όγδοης στη σειρά), δηλαδή  $\delta = \frac{4+5}{2} = 4,5$ .

Παρατηρούμε ότι, η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

### Διάμεσος σε Ομαδοποιημένα Δεδομένα

Θεωρούμε τα δεδομένα του ύψους των μαθητών στον πίνακα 9 και το αντίστοιχο ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων με την πολυγωνική γραμμή, σχήμα 13. Η διάμεσος, όπως ορίστηκε, αντιστοιχεί στην τιμή  $x = \delta$  της μεταβλητής  $X$  (στον οριζόντιο άξονα), έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες του  $\delta$ . Δηλαδή, η διάμεσος θα έχει αθροιστική σχετική συχνότητα  $F_i = 50\%$ . Εφόσον στον κάθετο άξονα έχουμε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες, από το σημείο  $A$  (50% των παρατηρήσεων) φέρουμε την  $AB // 0x$  και στη συνέχεια τη  $B\Gamma \perp 0x$ . Τότε, στο σημείο  $\Gamma$  αντιστοιχεί η διάμεσος  $\delta$  των παρατηρήσεων. Δηλαδή,  $\delta \approx 173$ .



### δ) Εκατοστημότητα ( $P_k$ )

Όπως ορίσαμε τη διάμεσο  $\delta$ , έτσι ώστε το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες του  $\delta$  και το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μεγαλύτερες του  $\delta$ , μπορούμε ανάλογα να ορίσουμε και τα **εκατοστημότητα** (percentiles)  $P_k$ ,  $k=1, 2, \dots, 99$ . Οι τιμές  $P_1, P_2, \dots, P_{99}$  χωρίζουν τη συνολική συχνότητα σε 100 ίσα μέρη. Επομένως, αναλόγως και με τον ορισμό της διαμέσου, ορίζουμε ως  $k$ -εκατοστημότητα σημείο ή  $P_k$  εκατοστημότητα ενός συνόλου παρατηρήσεων την τιμή εκείνη για την οποία το πολύ  $k\%$  των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του  $P_k$  και το πολύ  $(100 - k)\%$  των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Ειδική περίπτωση εκατοστημότητας είναι τα  $P_{25}, P_{50}, P_{75}$ , τα οποία καλούνται **τεταρτημότητα** (quartiles) και συμβολίζονται με  $Q_1, Q_2$  και  $Q_3$ , αντίστοιχα.

Για το  $Q_1$  έχουμε αριστερά το πολύ 25% των παρατηρήσεων και δεξιά το πολύ 75%. Όμοια για το  $Q_3$  έχουμε αριστερά το πολύ 75% των παρατηρήσεων και δεξιά το πολύ 25% των παρατηρήσεων. Προφανώς το  $Q_2 = P_{50}$  συμπίπτει και με τη διάμεσο, δηλαδή  $Q_2 = \delta$ . Τα μέτρα αυτά χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά για τη μελέτη ενός συνόλου δεδομένων.

Συχνά για ευκολία ο υπολογισμός των τεταρτημορίων  $Q_1$  και  $Q_3$  ενός συνόλου δεδομένων γίνεται **κατά προσέγγιση** υπολογίζοντας τις διαμέσους του πρώτου και του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, προκειμένου να υπολογίσουμε τα τεταρτημότητα των δεδομένων 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9, εργαζόμαστε ως εξής:

- Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά μεγέθους:

Έχουμε  $n = 13$  παρατηρήσεις, οι οποίες σε αύξουσα σειρά είναι:

0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9.

- Υπολογίζουμε τη διάμεσο, όπως προαναφέραμε:

Η διάμεσος είναι η έβδομη στη σειρά παρατήρηση, δηλαδή  $\delta = 4$ .

- Υπολογίζουμε τη διάμεσο του πρώτου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή των παρατηρήσεων που είναι αριστερά του  $\delta$ . Η τιμή αυτή είναι το  $Q_1$ :

Η διάμεσος των παρατηρήσεων που είναι αριστερά του  $\delta$ , δηλαδή των

0 1 1 1 2 3, είναι το  $Q_1 = \frac{1+1}{2} = 1$ .

- Υπολογίζουμε τη διάμεσο του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή των παρατηρήσεων που είναι δεξιά του  $\delta$ . Η τιμή αυτή είναι το  $Q_3$ .

Η διάμεσος των παρατηρήσεων που είναι δεξιά του  $\delta$ , δηλαδή των 5 6 6 8 8 9, είναι το  $Q_3 = \frac{6+8}{2} = 7$ . (Όμως το ακριβές, σύμφωνα με τον ορισμό είναι  $Q_3 = 6$ ).

### **Εκατοστημρία σε Ομαδοποιημένα Δεδομένα**

Ο υπολογισμός των εκατοστημορίων (ή τεταρτημορίων) σε ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται όπως και στη διάμεσο από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. Στο σχήμα 13 δίνονται τα  $Q_1$ ,  $Q_2 = \delta$ ,  $Q_3$  και  $P_{10}$ ,  $P_{90}$  για τα δεδομένα του πίνακα 9, από το οποίο βρίσκουμε κατά προσέγγιση:

$$P_{10} = 162,5, \quad Q_1 = 168, \quad \delta = 173, \quad Q_3 = 178 \quad \text{και} \quad P_{90} = 184.$$

### **ε) Επικρατούσα Τιμή ( $M_0$ )**

Στην περίπτωση μη ομαδοποιημένων δεδομένων **επικρατούσα τιμή** ή **κορυφή** (mode)  $M_0$  ορίζεται ως η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Είναι προφανές ότι η επικρατούσα τιμή μπορεί να οριστεί και στην περίπτωση ποιοτικών δεδομένων, ενώ τα άλλα μέτρα που είδαμε ορίζονται μόνο για ποσοτικά δεδομένα. Για παράδειγμα:

α) Η επικρατούσα τιμή (επικρατούσα απασχόληση) για την απασχόληση των μαθητών του πίνακα 7 στον ελεύθερο χρόνο τους είναι  $M_0 = \text{“Μουσική”}$ .

β) Η επικρατούσα τιμή του αριθμού των αδελφών των μαθητών στον πίνακα 6 είναι  $M_0 = 1$ , δηλαδή οι περισσότερες οικογένειες (55%) έχουν δύο παιδιά.

γ) Για να βρούμε την επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων 0 1 1 2 2 2 3 4 4 4 5 5 7 8, κατασκευάζουμε το διπλανό πίνακα συχνοτήτων. Οι τιμές 2 και 4 είναι και οι δύο επικρατούσες τιμές, γιατί καθεμιά έχει συχνότητα 3. Βλέπουμε εδώ ότι η επικρατούσα τιμή μπορεί να μην είναι μοναδική. Όταν έχουμε δύο κορυφές, η αντίστοιχη κατανομή συχνοτήτων λέγεται **δικόρυφη** (bimodal), ενώ όταν έχουμε πολλές κορυφές λέγεται **πολυκόρυφη** (multimodal).

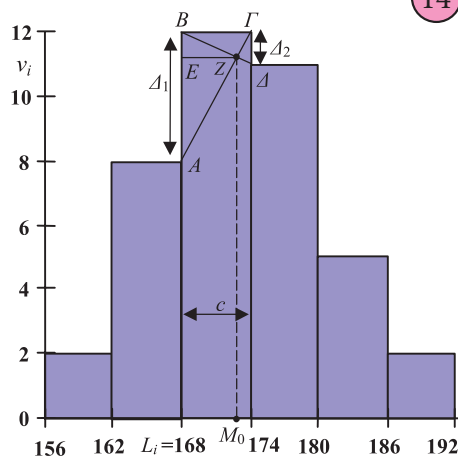
| $x_i$ | $v_i$ |
|-------|-------|
| 0     | 1     |
| 1     | 2     |
| 2     | 3     |
| 3     | 1     |
| 4     | 3     |
| 5     | 2     |
| 7     | 1     |
| 8     | 1     |

δ) Όταν όλες οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή. Έτσι, για τις παρατηρήσεις 0, 1, 2, 7, 8, 9 δεν έχουμε επικρατούσα τιμή.

## Επικρατούσα Τιμή σε Ομαδοποιημένα Δεδομένα

Όταν έχουμε ομαδοποιημένα (ποσοτικά) δεδομένα σε **ισοπλάτεις** κλάσεις, τότε βρίσκουμε πρώτα την **επικρατούσα κλάση**  $i$ , δηλαδή την κλάση με τη μεγαλύτερη συχνότητα.

Υποθέτοντας, όπως έχουμε ήδη αναφέρει και προηγουμένως, ότι οι παρατηρήσεις στις κλάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα, η επικρατούσα τιμή προσδιορίζεται, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα 14, ως η τετμημένη του σημείου τομής  $Z$  των ευθύγραμμων τμημάτων  $AF$  και  $BD$ . Στο σχήμα αυτό δίνεται η κορυφή για το ύψος των μαθητών του πίνακα 9. Κατά προσέγγιση η κορυφή (επικρατέστερο ύψος) είναι  $M_0 \approx 173$  cm.



14

## Μέτρα Διασποράς

Στα προηγούμενα είδαμε ότι τα μέτρα θέσης παρέχουν κάποια πληροφορία για την κατανομή ενός πληθυσμού. Αυτά όμως δεν επαρκούν, για να περιγράψουν πλήρως την κατανομή, όπως διαπιστώσαμε στην αρχή της § 2.3 συγκρίνοντας τις βαθμολογίες των μαθητών δύο τμημάτων Α και Β στα σχήματα 11(α), (β).

Ενώ οι βαθμολογίες των δύο τμημάτων Α και Β έχουν ίσες μέσες τιμές  $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$  και ίσες διαμέσους  $\delta_A = \delta_B = 15$ , είναι φανερό ότι οι κατανομές τους διαφέρουν σημαντικά ως προς τη μεταβλητότητά τους. Οι βαθμοί του τμήματος Α είναι περισσότερο “συγκεντρωμένοι” γύρω από τη μέση τιμή, ενώ, αντίθετα, οι βαθμοί του τμήματος Β διασπείρονται περισσότερο, έχουν δηλαδή μεγάλες αποκλίσεις γύρω από τη μέση τιμή τους.

Παράλληλα λοιπόν με τα μέτρα θέσης κρίνεται απαραίτητη και η εξέταση κάποιων μέτρων διασποράς ή μεταβλητότητας, δηλαδή μέτρων που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης.

Τέτοια μέτρα λέγονται **μέτρα διασποράς** (measures of variation, dispersion measures). Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

### α) Εύρος ( $R$ )

Το απλούστερο από τα μέτρα διασποράς είναι το **εύρος** ή **κύμανση** (range) ( $R$ ), που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή:

$$\text{Εύρος } R = \text{Μεγαλύτερη παρατήρηση} - \text{Μικρότερη παρατήρηση}$$

Έτσι, για τη βαθμολογία του τμήματος Α το εύρος είναι  $R_A = 18 - 13 = 5$ , ενώ για το τμήμα Β  $R_B = 20 - 10 = 10$ , τιμές που επιβεβαιώνουν ότι πράγματι στο τμήμα Β έχουμε μεγαλύτερη διασπορά βαθμολογίας παρά στο τμήμα Α.

Όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος δίνεται από τη διαφορά του κατώτερου ορίου της πρώτης κλάσης από το ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσης. Το εύρος των υψών των μαθητών του δείγματος στον πίνακα 9 είναι  $R = 192 - 156 = 36$ . Προφανώς, το εύρος σε ομαδοποιημένα δεδομένα μπορεί να διαφέρει ελαφρώς από τα αντίστοιχα δεδομένα πριν αυτά ομαδοποιηθούν. Για παράδειγμα, το εύρος των υψών στον πίνακα 8, πριν αυτά ομαδοποιηθούν, βρήκαμε ότι είναι  $R = 191 - 156 = 35$ .

Το εύρος είναι ένα αρκετά απλό μέτρο, που υπολογίζεται εύκολα δε θεωρείται όμως αξιόπιστο μέτρο διασποράς, γιατί βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.

### β) Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος ( $Q$ )

Το **ενδοτεταρτημοριακό εύρος** (interquartile range) είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου  $Q_1$  από το τρίτο τεταρτημόριο  $Q_3$ , δηλαδή:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

Στο μεταξύ τους διάστημα περιλαμβάνεται το 50% των παρατηρήσεων.

Επομένως όσο μικρότερο είναι αυτό το διάστημα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η συγκέντρωση των τιμών και άρα μικρότερη η διασπορά των τιμών της μεταβλητής.

Από τα δεδομένα του σχήματος 13 βρήκαμε κατά προσέγγιση  $Q_1 = 168$ ,  $Q_3 = 178$  επομένως το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι  $Q = 10$ . Δηλαδή το 50% των μαθητών έχουν ύψος μεταξύ 168 και 178 cm.

### γ) Διακύμανση ( $s^2$ )

Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε τη διασπορά των παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_v$  μιας μεταβλητής  $X$  θα ήταν να αφαιρέσουμε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  από κάθε παρατήρηση και να βρούμε τον αριθμητικό μέσο των διαφορών αυτών, δηλαδή τον αριθμό:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})}{v}.$$

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

Γι' αυτό, ως ένα μέτρο διασποράς παίρνουμε τον μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων των  $t_i$  από τη μέση τιμή τους  $\bar{x}$ . Το μέτρο αυτό καλείται **διακύμανση** ή **διασπορά** (variance) και ορίζεται από τη σχέση

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2 \quad (1)$$

Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται ότι μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\} \quad (2)$$

η οποία διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς κυρίως όταν η μέση τιμή  $\bar{x}$  δεν είναι ακέραιος αριθμός.

Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα, η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i \quad (3)$$

ή την ισοδύναμη μορφή:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^K x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^K x_i v_i \right)^2}{v} \right\}. \quad (4)$$

όπου  $x_1, x_2, \dots, x_K$  οι τιμές της μεταβλητής (ή τα κέντρα των κλάσεων) με αντίστοιχες συχνότητες  $v_1, v_2, \dots, v_K$ .

Για παράδειγμα, η διακύμανση της βαθμολογίας των μαθητών του τμήματος Α είναι σύμφωνα με την (1)

$$s_A^2 = \frac{(13-15)^2 + (13-15)^2 + (14-15)^2 + \dots + (18-15)^2}{10} = \frac{20}{10} = 2,$$

ενώ για τους μαθητές του τμήματος Β βρίσκουμε  $s_B^2 = 6,6$ , που επιβεβαιώνει τη διαπίστωσή μας ότι η βαθμολογία των μαθητών του τμήματος Β παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από τη βαθμολογία των μαθητών του τμήματος Α.

Ομοίως, η διακύμανση του ύψους των μαθητών για τα ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 9, υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο (3), όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

| Κλάσεις<br>[ - ) | Κεντρικές<br>τιμές $x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | $x_i^2$ | $x_i v_i$               | $x_i^2 v_i$                  |
|------------------|--------------------------|--------------------|---------|-------------------------|------------------------------|
| 156-162          | 159                      | 2                  | 25281   | 318                     | 50562                        |
| 162-168          | 165                      | 8                  | 27225   | 1320                    | 217800                       |
| 168-174          | 171                      | 12                 | 29241   | 2052                    | 350892                       |
| 174-180          | 177                      | 11                 | 31329   | 1947                    | 344619                       |
| 180-186          | 183                      | 5                  | 33489   | 915                     | 167445                       |
| 186-192          | 189                      | 2                  | 35721   | 378                     | 71442                        |
| Σύνολο:          |                          | $v = 40$           | —       | $\Sigma x_i v_i = 6930$ | $\Sigma x_i^2 v_i = 1202760$ |

Επομένως:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^K x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^K x_i v_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{40} \left\{ 1202760 - \frac{6930^2}{40} \right\} = 53,4$$

Εάν υπολογίσουμε τη διακύμανση από τα μη ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 8, βρίσκουμε  $s^2 = 50,9$ . Η διαφορά αυτή οφείλεται στην απώλεια πληροφορίας λόγω ομαδοποίησης των παρατηρήσεων.

### δ) Τυπική Απόκλιση ( $s$ )

Η διακύμανση είναι μια αξιόπιστη παράμετρος διασποράς, αλλά έχει ένα μειονέκτημα. Δεν εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. Για παράδειγμα, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm, η διακύμανση εκφράζεται σε  $\text{cm}^2$ . Αν όμως πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, θα έχουμε ένα μέτρο διασποράς που θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού, όπως ακριβώς είναι και όλα τα άλλα μέτρα θέσης, που εξετάσαμε έως τώρα. Η ποσότητα αυτή λέγεται **τυπική απόκλιση** (standard deviation), συμβολίζεται με  $s$  και δίνεται από τη σχέση:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Η τυπική απόκλιση για το ύψος των μαθητών του πίνακα 4 είναι από το προηγούμενο παράδειγμα  $s = \sqrt{53,4} = 7,3 \text{ cm}$ , αν αυτή υπολογιστεί από τα ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 9, ή  $s = \sqrt{50,9} = 7,13 \text{ cm}$ , αν υπολογιστεί από τα μη ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 8.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση  $s$  έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

i) το 68% περίπου των παρατηρήσεων

βρίσκεται στο διάστημα

$$(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$$

ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων

βρίσκεται στο διάστημα

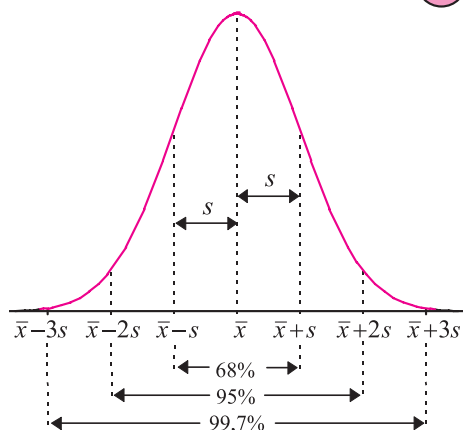
$$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$$

iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$$(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$$

iv) το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή  $R \approx 6s$ .

15



## Συντελεστής Μεταβολής (CV)

Έστω ότι από ένα δείγμα είκοσι μαθητών της Α΄ Γυμνασίου βρήκαμε μέσο βάρος  $\bar{x}_A = 40$  kgf και τυπική απόκλιση  $s_A = 6$  kgf, ενώ από ένα δεύτερο δείγμα τριάντα μαθητών της Γ΄ Λυκείου βρήκαμε μέσο βάρος  $\bar{x}_B = 75$  kgf και τυπική απόκλιση  $s_B = 6$  kgf. Όπως αντιλαμβανόμαστε, είναι λάθος να πούμε ότι το βάρος των μαθητών του Λυκείου έχει τον ίδιο βαθμό μεταβλητότητας με το βάρος των μαθητών του Γυμνασίου, καθόσον η βαρύτητα που έχουν τα 6 kgf στο μέσο βάρος των 40 kgf είναι διαφορετική από αυτήν που έχουν στο μέσο βάρος των 75 kgf.

Ακόμη, ας υποθέσουμε ότι ο μέσος μισθός των υψηλόβαθμων υπαλλήλων μιας εταιρείας Α είναι  $\bar{x}_A = 2.500$  € με τυπική απόκλιση  $s_A = 420$  €, ενώ για τους υπαλλήλους μιας εταιρείας Β είναι  $\bar{x}_B = 1.400$  \$ με τυπική απόκλιση  $s_B = 350$  \$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης του μισθού, επομένως οι διασπορές των παρατηρήσεων δεν είναι άμεσα συγκρίσιμες.

Ένα μέτρο με το οποίο μπορούμε να ξεπεράσουμε τις παραπάνω δυσκολίες και το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο **συντελεστής μεταβολής** ή **συντελεστής μεταβλητότητας** (coefficient of variation), ο οποίος για  $\bar{x} \neq 0$  ορίζεται από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}}$$

Αν  $\bar{x} < 0$ , τότε αντί της  $\bar{x}$  χρησιμοποιούμε την  $|\bar{x}|$ .

Ο συντελεστής μεταβολής είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης, εκφράζεται επί τοις εκατό και παριστάνει ένα μέτρο **σχετικής διασποράς** των τιμών και όχι της απόλυτης διασποράς, όπως έχουμε δει έως τώρα.

Για το πρώτο παράδειγμα του βάρους έχουμε συντελεστή μεταβολής για τις δύο ομάδες μαθητών:

$$CV_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{6}{40} = 0,15 = 15\% \text{ και}$$

$$CV_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{6}{75} = 0,08 = 8\%$$

δηλαδή, ο βαθμός διασποράς του βάρους των μαθητών Γυμνασίου είναι μεγαλύτερος από το βαθμό διασποράς του βάρους των μαθητών Λυκείου (για τα συγκεκριμένα δείγματα).

Ανάλογα συμπεράσματα βγάζουμε και για το δεύτερο παράδειγμα, όπου βρίσκουμε  $CV_A = 16,8\%$  και  $CV_B = 25\%$ . Παρ' όλο που η τυπική απόκλιση των μισθών στην εταιρεία Α είναι μεγαλύτερη από την τυπική απόκλιση στην εταιρεία Β, ο συντελεστής μεταβολής δίνει μεγαλύτερη σχετική διασπορά στην εταιρεία Β. Αυτό μεταφράζεται στο να λέμε ότι έχουμε μεγαλύτερη **ομοιογένεια** μισθών στην εταιρεία Α παρά στη Β.

Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Ο διπλανός πίνακας συχνοτήτων δίνει την κατανομή του χρόνου  $X$  (σε sec) 60 μαθητών που χρειάστηκαν, για να τρέξουν μια δεδομένη απόσταση. Να υπολογιστούν:

- ο μέσος, ο διάμεσος και ο επικρατέστερος χρόνος για την κάλυψη της συγκεκριμένης απόστασης,
- η τυπική απόκλιση,
- σε πόσο χρόνο από της στιγμή της εκκίνησης κάλυψε την απόσταση το 25% των μαθητών.

| $x_i$ | $v_i$ |
|-------|-------|
| 50    | 4     |
| 55    | 6     |
| 60    | 8     |
| 65    | 12    |
| 70    | 14    |
| 75    | 10    |
| 80    | 6     |

### ΛΥΣΗ

α) • Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής συμπληρώνουμε τις τρεις πρώτες στήλες του παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$  | $x_i v_i$               | $x_i^2 v_i$                 |
|--------|--------|-------------------------|-----------------------------|
| 50     | 4      | 200                     | 10000                       |
| 55     | 6      | 330                     | 18150                       |
| 60     | 8      | 480                     | 28800                       |
| 65     | 12     | 780                     | 50700                       |
| 70     | 14     | 980                     | 68600                       |
| 75     | 10     | 750                     | 56250                       |
| 80     | 6      | 480                     | 38400                       |
| Σύνολο | $v=60$ | $\Sigma x_i v_i = 4000$ | $\Sigma x_i^2 v_i = 270900$ |

Επομένως, ο μέσος χρόνος για την κάλυψη της συγκεκριμένης απόστασης είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{4000}{60} \approx 66,67 \text{ sec.}$$

• Έχουμε  $v = 60$  παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά, άρα η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 30ής και 31ης παρατήρησης, δηλαδή ο μέσος όρος των παρατηρήσεων 65 και 70, άρα  $\delta = \frac{65+70}{2} = 67,5 \text{ sec.}$

• Η επικρατούσα τιμή είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, άρα  $M_0 = 70 \text{ sec.}$

β) Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης είναι προτιμότερο να εφαρμόσουμε τη σχέση (4), μιας και η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος αριθμός.

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η διακύμανση της μεταβλητής  $X$  είναι:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum x_i^2 v_i - \frac{(\sum x_i v_i)^2}{v} \right\} = \frac{1}{60} \left\{ 270900 - \frac{4000^2}{60} \right\} = 70,56 \text{ sec}^2.$$

και η τυπική απόκλιση  $s = \sqrt{70,56} = 8,4 \text{ sec.}$

γ) Θέλουμε να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο,  $Q_1$ . Αριστερά της διαμέσου  $\delta = 67,5$  έχουμε 30 παρατηρήσεις. Η διάμεσος αυτών των 30 πρώτων παρατηρήσεων είναι το ημιάθροισμα της 15ης και 16ης παρατήρησης, δηλαδή  $Q_1 = (60 + 60) / 2 = 60 \text{ sec.}$  Δηλαδή, ύστερα από μία ώρα από τη στιγμή της εκκίνησης το 25% των μαθητών κάλυψαν τη συγκεκριμένη απόσταση.

## 2. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^v (x_i - \lambda)^2 = (x_1 - \lambda)^2 + (x_2 - \lambda)^2 + \dots + (x_v - \lambda)^2$$

γίνεται ελάχιστη, όταν  $\lambda = \bar{x}$ .

### ΛΥΣΗ

Λαμβάνοντας την πρώτη παράγωγο της  $f(\lambda)$ , βρίσκουμε

$$f'(\lambda) = -2(x_1 - \lambda) - 2(x_2 - \lambda) - \dots - 2(x_v - \lambda).$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= 0 \\ x_1 - \lambda + x_2 - \lambda + \dots + x_v - \lambda &= 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_v - v\lambda &= 0 \\ \lambda &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v} = \bar{x}. \end{aligned}$$

Η δεύτερη παράγωγος της  $f(\lambda)$  είναι:

$$f''(\lambda) = \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_v = 2v$$

και επειδή  $f''(\bar{x}) = 2v > 0$ , συνεπάγεται ότι για  $\lambda = \bar{x}$  η  $f(\lambda)$  γίνεται ελάχιστη.

**3.** Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_v$   $v$  παρατηρήσεις με μέση τιμή  $\bar{x}$  και τυπική απόκλιση  $s_x$ .

α) Αν  $y_1, y_2, \dots, y_v$  είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν προσθέσουμε σε καθεμιά από τις  $x_1, x_2, \dots, x_v$  μια σταθερά  $c$ , να δειχτεί ότι:

$$\text{i) } \bar{y} = \bar{x} + c, \quad \text{ii) } s_y = s_x$$

β) Αν  $y_1, y_2, \dots, y_v$  είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις  $x_1, x_2, \dots, x_v$  επί μια σταθερά  $c$ , να αποδειχτεί ότι:

$$\text{i) } \bar{y} = c\bar{x}, \quad \text{ii) } s_y = |c|s_x$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) Έχουμε  $y_i = x_i + c$ ,  $i = 1, 2, \dots, v$  επομένως:

$$\begin{aligned} \text{i) } \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_v}{v} = \frac{x_1 + c + x_2 + c + \dots + x_v + c}{v} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v} + \frac{vc}{v} = \bar{x} + c \\ \text{ii) } s_y^2 &= \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_v - \bar{y})^2}{v} \\ &= \frac{(x_1 + c - \bar{x} - c)^2 + (x_2 + c - \bar{x} - c)^2 + \dots + (x_v + c - \bar{x} - c)^2}{v} \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_v - \bar{x})^2}{v} = s_x^2. \end{aligned}$$

Άρα και  $s_y = s_x$ .

β) Έχουμε  $y_i = cx_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, v$ , επομένως:

$$\begin{aligned} \text{i) } \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_v}{v} = \frac{cx_1 + cx_2 + \dots + cx_v}{v} = c \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v} = c\bar{x} \\ \text{ii) } s_y^2 &= \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_v - \bar{y})^2}{v} \\ &= \frac{(cx_1 - c\bar{x})^2 + (cx_2 - c\bar{x})^2 + \dots + (cx_v - c\bar{x})^2}{v} \\ &= \frac{c^2 [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_v - \bar{x})^2]}{v} = c^2 s_x^2. \end{aligned}$$

Άρα και  $s_y = |c|s_x$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έξι διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί έχουν μέση τιμή 15. Να βρείτε τους αριθμούς και τη διάμεσό τους.
2. Έχουμε ένα δείγμα  $n = 10$  παρατηρήσεων, όπου κάθε παρατήρηση μπορεί να είναι 1, 2 ή 3. Είναι δυνατό η μέση τιμή να είναι α) 1 β) 4 γ) 1,8;
3. Ένας επενδυτής επένδυσε το ίδιο ποσό χρημάτων σε 8 διαφορετικές μετοχές στο χρηματιστήριο. Κατά τη διάρκεια του περασμένου έτους οι μετοχές είχαν τις παρακάτω εκατοστιαίες μεταβολές στην αξία τους: 5, 16, -10, 0, 27, 14, -20, 34. Να βρεθεί η μέση εκατοστιαία απόδοση της επένδυσης.
4. Το μέσο ύψος 9 καλαθοσφαιριστών μιας ομάδας είναι 205 cm.  
α) Για να “ψηλώσει” την ομάδα ο προπονητής πήρε έναν ακόμη παίκτη με ύψος 216 cm. Ποιο είναι το μέσο ύψος της ομάδας τώρα;  
β) Εάν ήθελε να “ψηλώσει” την ομάδα στα 208 cm, πόσο ύψος έπρεπε να έχει ο καλαθοσφαιριστής που πήρε;
5. Η μέση ηλικία 18 αγοριών και 12 κοριτσιών μιας τάξης είναι 15,4 χρόνια. Εάν η μέση ηλικία των αγοριών είναι 15,8 χρόνια, να βρείτε τη μέση ηλικία των κοριτσιών.
6. Σε μια κάλη υπάρχουν άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες σε αναλογία 10%, 20%, 30% και 40% αντίστοιχα. Μια άσπρη μπάλα έχει βάρος 10 gr, μια μαύρη 11 gr, μια κόκκινη 12 gr και μια πράσινη 13 gr. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή του βάρους για όλες τις μπάλες, αν ξέρουμε ότι στην κάλη υπάρχουν α) 10 μπάλες, β) 20 μπάλες, γ) δε γνωρίζουμε πόσες μπάλες υπάρχουν στην κάλη.
7. Η επίδοση ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι 12, 10, 16, 18, 14.  
α) Να βρείτε τη μέση επίδοση.  
β) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 3, 1, 1 και 3, ποια θα ήταν η μέση επίδοση; Σε ποια μαθήματα έπρεπε να δώσει ιδιαίτερη προσοχή ο μαθητής;
8. Μία εταιρεία απασχολεί 5 υπαλλήλους στο Τμήμα Α με μέσο (μηνιαίο) μισθό 1249 ευρώ, 6 υπαλλήλους στο Τμήμα Β με μέσο μισθό 1280 ευρώ,

και 4 υπαλλήλους στο Τμήμα Γ με μέσο μισθό 1360 ευρώ. Ποιος είναι ο μέσος μισθός όλων των υπαλλήλων;

9. Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 6. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 5, 8, 9. Να βρείτε τους άλλους δύο.

10. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Η πέμπτη συχνότητα χάθηκε! Μπορείτε να την “ανακαλύψετε”, εάν γνωρίζετε ότι

| $x_i$ | $\nu_i$ |
|-------|---------|
| 2     | 1       |
| 3     | 3       |
| 4     | 1       |
| 5     | 2       |
| 6     | ;       |
| 7     | 1       |

- α) η μέση τιμή είναι 4,4,  
 β) η διάμεσος είναι το 4,5,  
 γ) υπάρχουν δύο επικρατούσες τιμές;

11. Για την κατανομή του βαθμού των Μαθηματικών της Β΄ τάξης των 40 μαθητών και μαθητριών της Γ΄ Λυκείου του πίνακα 4 να βρείτε:

- α) τη μέση τιμή,  
 β) τη διάμεσο,  
 γ) την επικρατούσα τιμή,  
 δ) το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

12. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό των επισκέψεων 40 μαθητών σε διάφορα μουσεία της χώρας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

| Επισκέψεις | Συχνότητα |
|------------|-----------|
| [0-2)      | 8         |
| 2-4        | 12        |
| 4-6        | 10        |
| 6-8        | 6         |
| 8-10       | 4         |

Να υπολογιστούν:

- α) η μέση τιμή,  
 β) η επικρατούσα τιμή,  
 γ) η διάμεσος,  
 δ) το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.

13. Το μέσο ύψος των 30 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι 170 cm. Ποιο θα είναι το μέσο ύψος της τάξης;

- α) αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 180 cm,  
 β) αν έρθει μια νέα μαθήτρια με ύψος 170 cm,  
 γ) αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 180 cm και έλθει μια μαθήτρια με ύψος 170 cm;

14. Καθεμία από τις παρακάτω λίστες δεδομένων έχουν μέση τιμή 50.

- α) Σε ποια λίστα υπάρχει (i) μεγαλύτερη (ii) μικρότερη διασπορά παρατηρήσεων; (Να μη γίνουν πράξεις).

0, 20, 40, 50, 60, 80, 100  
 0, 48, 49, 50, 51, 52, 100  
 0, 1, 2, 50, 98, 99, 100.

- β) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση των δεδομένων αυτών το εύρος;
15. Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν: 7, 11, 10, 13, 15, 3, 12, 11, 4, 14. Να υπολογίσετε:
- τη μέση τιμή, την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο,
  - τα  $Q_1$  και  $Q_3$ ,
  - το εύρος, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.
16. Να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση των δεδομένων της άσκησης 12.
17. Ο μέσος χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε το πρωί από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο είναι 10 λεπτά με τυπική απόκλιση 2 λεπτά. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται:
- κάτω από 8 λεπτά
  - πάνω από 14 λεπτά
  - το πολύ 10 λεπτά
  - από 6 έως 12 λεπτά
- για να πάνε στο σχολείο τους.
18. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο για τα παρακάτω δείγματα δεδομένων και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα:
- 1    2    6
  - 2    4    12
  - 11    12    16
  - 12    14    22.
19. Να υπολογίσετε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση για καθεμιά από τις παρακάτω λίστες δεδομένων. Συγκρίνοντας τα δεδομένα και τα αποτελέσματα τι συμπέρασμα βγάζετε;
- 1, 3, 4, 5, 7
  - 3, 9, 12, 15, 21
  - 6, 8, 9, 10, 12
  - 1, -3, -4, -5, -7.
20. Οι μαθητές του Γ2 ξόδεψαν ετησίως κατά μέσο όρο 625 ευρώ αγοράζοντας διάφορα τρόφιμα από το κυλικείο του σχολείου. Εάν ο συντελεστής μεταβολής είναι 27,2%, να βρείτε την τυπική απόκλιση. Εάν επιπλέον γνωρίζετε ότι το  $\sum x_i^2 = 11.746.700$ , πόσοι είναι οι μαθητές του Γ2;

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Η βαθμολογία 50 μαθητών στην Ιστορία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20 (καθένας δεν είναι κάτω από τη βάση). Γνωρίζουμε επίσης ότι πέντε μαθητές έχουν βαθμό κάτω από 12, δεκαπέντε κάτω από 14, πέντε μεγαλύτερο ή

ίσο του 18 και δεκαπέντε μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

α) Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.

β) Να υπολογίσετε: i) τη μέση τιμή, ii) τη διάμεσο.

γ) Εάν στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση δοθεί έπαινος, πόσο βαθμό πρέπει να έχει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο;

2. Η μέση τιμή και η διακύμανση των 5 τιμών ενός δείγματος είναι  $\bar{x} = 4$  και  $s^2 = 10$ , αντίστοιχα. Εάν, για τις τέσσερις τιμές ισχύει  $\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 = 14$ , να βρεθεί η πέμπτη τιμή.

3. Ένας μαθητής αγόρασε 10 βιβλία που κόστιζαν χωρίς Φ.Π.Α. 15, 9, 6, 18, 21, 6, 18, 27, 9, 12 ευρώ αντίστοιχα.

α) Ποια είναι η μέση, η διάμεση και η επικρατούσα αξία (τιμή) των βιβλίων;

β) Πώς μεταβάλλονται οι απαντήσεις του ερωτήματος (α), αν προσθέσουμε και το Φ.Π.Α., που είναι 18%;

γ) Αν ο μαθητής πληρώσει επί πλέον 0,3 ευρώ (χωρίς Φ.Π.Α.) για το ντύσιμο κάθε βιβλίου, πώς διαμορφώνονται τώρα οι απαντήσεις στο ερώτημα (β);

4. Να δείξετε ότι εάν από όλες τις τιμές 0, 2, 4, 6, 8, 10 και 12 ενός δείγματος αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους και διαιρέσουμε με την τυπική τους απόκλιση, τότε οι τιμές που θα προκύψουν θα έχουν μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

5. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα ύψη των πωλήσεων σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

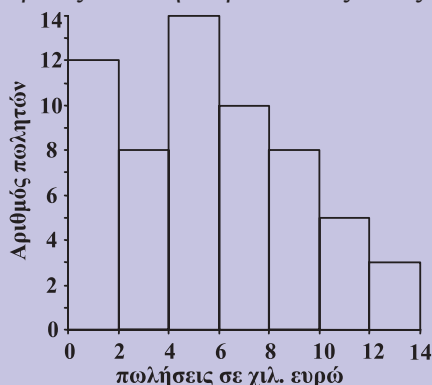
α) Πόσοι είναι οι πωλητές;

β) Πόσοι πωλητές έκαναν πωλήσεις πάνω από 5 χιλιάδες ευρώ;

γ) Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή των πωλήσεων.

δ) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανση.

ε) Από το πολύγωνο αθροιστικών



σχετικών συχνοτήτων να εκτιμήσετε τα τρία τεταρτημόρια  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ .

6. Στο διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή της ηλικίας των ατόμων μιας πόλης. Να υπολογίσετε:

- α) Την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.  
β) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

| Ηλικία<br>(σε έτη) | Συχνότητα<br>(σε χιλιάδες) |
|--------------------|----------------------------|
| 0-20               | 12                         |
| 20-40              | 14                         |
| 40-60              | 20                         |
| 60-80              | 10                         |
| 80-100             | 4                          |

7. Από τη Στατιστική της Φυσικής Κίνησης Πληθυσμού της Ελλάδας οι θάνατοι λόγω υπερτασικής νόσου το 1995 δίνονται στον διπλανό πίνακα (ΕΣΥΕ):

Να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για την ηλικία ανδρών και γυναικών, αντίστοιχα, που πέθαναν από υπερτασική νόσο το 1995, και στη συνέχεια να τα συγκρίνετε.

| Ηλικία | Θάνατοι |          |
|--------|---------|----------|
|        | Άνδρες  | Γυναίκες |
| 50-54  | 10      | 7        |
| 55-59  | 10      | 4        |
| 60-64  | 17      | 21       |
| 65-69  | 36      | 57       |
| 70-74  | 44      | 61       |
| 75-79  | 73      | 109      |
| 80-84  | 117     | 162      |
| 85-89  | 123     | 195      |

## 2.4 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

### Εισαγωγή

Στα διάφορα προβλήματα που εξετάσαμε έως τώρα στη Στατιστική ασχοληθήκαμε κάθε φορά με μία μόνο μεταβλητή (ξεχωριστά), π.χ. με το βάρος, με το ύψος, με την επίδοση μαθητών κτλ. Για καθεμιά μεμονωμένη μεταβλητή αρκεστήκαμε στη μελέτη της κατανομής συχνοτήτων, στον υπολογισμό διάφορων μέτρων όπως μέση τιμή, διάμεσος, διακύμανση κτλ. Σε αρκετές όμως περιπτώσεις εξίσου ενδιαφέρουσα είναι και η ταυτόχρονη μελέτη δύο ή περισσότερων μεταβλητών, για να προσδιορίσουμε με ποιο τρόπο οι μεταβλητές αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα:

- α) Η ηλικία και το βάρος ενός παιδιού έχουν κάποια θετική εξάρτηση (συσχέτιση) μεταξύ τους με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλο είναι το παιδί τόσο μεγαλύτερο βάρος θα έχει.

- β) Η διάρκεια ζωής των ζώντων οργανισμών σε μια περιοχή και το ποσοστό μόλυνσης της περιοχής έχουν αρνητική εξάρτηση μεταξύ τους, με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλο είναι το ποσοστό μόλυνσης της περιοχής τόσο μικρότερη είναι η διάρκεια ζωής των οργανισμών που ζουν στην περιοχή.
- γ) Όσο μεγαλύτερη (μέχρι ένα ανώτερο όριο) είναι η περιεκτικότητα σε φθόριο στο πόσιμο νερό, τόσο μικρότερες είναι οι περιπτώσεις στη φθορά των δοντιών των μικρών παιδιών.
- δ) Η συνολική παραγωγή καλαμποκιού εξαρτάται από τη θέση του χωραφιού, από την ποσότητα λιπάσματος, από την επίδραση της θερμοκρασίας, της υγρασίας κτλ.
- ε) Το ύψος των αποδοχών των υπαλλήλων μιας εταιρείας δεν εξαρτάται από το βάρος τους.

Έτσι λοιπόν είναι ενδιαφέρον να εξεταστούν οι επιδράσεις που κάποιες μεταβλητές ασκούν σε κάποιες άλλες μεταβλητές. Η ύπαρξη μιας συναρτησιακής σχέσης (εξίσωσης) μεταξύ των μεταβλητών μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύτιμη για την πρόβλεψη των τιμών μιας μεταβλητής από τις γνώσεις που διαθέτουμε για τις άλλες μεταβλητές, όταν ισχύουν κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες.

Ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη μιας απ' αυτές μέσω των άλλων χαρακτηρίζεται με την ονομασία **ανάλυση παλινδρόμησης** (regression analysis). Ιστορικά, ο όρος “regression” χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Άγγλο ανθρωπολόγο Galton (1822-1911) το 1885. Με τη μελέτη του ύψους των παιδιών σε σχέση με το ύψος των γονέων διαπιστώθηκε ότι παιδιά ψηλών γονέων τείνουν, κατά μέσο όρο, να είναι κοντότερα των γονιών τους, ενώ παιδιά κοντών γονέων τείνουν, κατά μέσο όρο, να γίνονται ψηλότερα των γονιών τους.

## ***Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση***

Η απλούστερη περίπτωση παλινδρόμησης είναι η απλή γραμμική παλινδρόμηση (simple linear regression), κατά την οποία υπάρχει μόνο μια **ανεξάρτητη μεταβλητή**  $X$  (independent or input variable), και η **εξαρτημένη μεταβλητή**  $Y$  (dependent or response variable), η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μία γραμμική συνάρτηση του  $X$ . Η περίπτωση αυτή εμφανίζεται τόσο σε πειραματικές όσο και σε μη πειραματικές μελέτες. Στις πειραματικές μελέτες ο ερευνητής καθορίζει, για παράδειγμα, από πριν τις δόσεις ενός φαρμάκου (ανεξάρτητη μεταβλητή) που δίνει στα πειραματόζωα και μετρά τις αντιδράσεις τους (εξαρτημένη μεταβλητή). Με την παλινδρόμηση ενδιαφέρεται να προσδιορίσει μία σχέση δόσης-αντίδρασης για το συγκεκριμένο φάρμακο. Στις μη πειραματικές μελέτες ή δειγματοληψίες, γίνονται μετρήσεις σε δύο χαρακτηριστικά (με-

ταβλητές) για κάθε άτομο (μονάδα) του δείγματος. Σε ένα δείγμα 10 μαθητών μετράμε, για παράδειγμα, το βάρος και το ύψος τους. Η διάκριση εδώ μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής είναι δύσκολη. Αν αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το “τι συμβαίνει με το βάρος των παιδιών όταν αλλάζει το ύψος τους”, τότε θεωρούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή  $X$  το ύψος και ως εξαρτημένη μεταβλητή  $Y$  το βάρος. Οπότε, ενδιαφερόμαστε για την **παλινδρόμηση του βάρους ( $Y$ ) πάνω στο ύψος ( $X$ )**. Αντίθετα, αν μας ενδιαφέρει το “τι συμβαίνει με το ύψος των παιδιών όταν αλλάζει το βάρος τους”, τότε θεωρούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή  $X$  το βάρος και ως εξαρτημένη μεταβλητή  $Y$  το ύψος. Τότε έχουμε παλινδρόμηση του ύψους ( $Y$ ) πάνω στο βάρος ( $X$ ).

### Διάγραμμα Διασποράς

Ο παρακάτω πίνακας 10 δίνει τα ύψη  $X$  (σε cm) και τα βάρη  $Y$  (σε kg) των 18 αγοριών της Γ' Λυκείου του πίνακα 4. Οι τιμές του ύψους δίνονται σε αύξουσα σειρά.

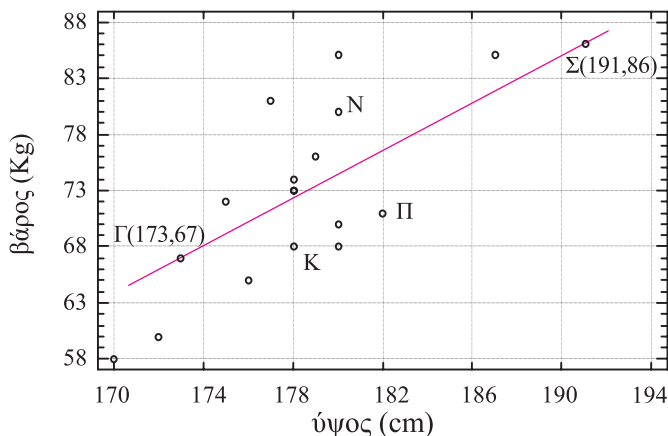
**Πίνακας 10**

Λίστα υψών (σε cm) και βαρών (σε kg) των 18 αγοριών του πίνακα 4.

| Μαθητής | Ύψος<br>$X$ | Βάρος<br>$Y$ | Μαθητής | Ύψος<br>$X$ | Βάρος<br>$Y$ |
|---------|-------------|--------------|---------|-------------|--------------|
| A       | 170         | 58           | K       | 178         | 68           |
| B       | 172         | 60           | Λ       | 179         | 76           |
| Γ       | 173         | 67           | M       | 180         | 68           |
| Δ       | 175         | 72           | N       | 180         | 80           |
| E       | 176         | 65           | Ξ       | 180         | 70           |
| Z       | 177         | 81           | O       | 180         | 85           |
| H       | 178         | 73           | Π       | 182         | 71           |
| Θ       | 178         | 74           | P       | 187         | 85           |
| I       | 178         | 73           | Σ       | 191         | 86           |

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε την περίπτωση όπου σε κάθε άτομο (μαθητή) γίνονται δύο μετρήσεις. Δηλαδή το δείγμα αποτελείται από τα ζεύγη τιμών των συνεχών μεταβλητών  $X$  (ύψος) και  $Y$  (βάρος).

Αν παραστήσουμε τα ζεύγη  $(x, y)$  των παρατηρήσεων σε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων, παρατηρούμε ότι προκύπτει μία “διασπορά” των σημείων που αντιστοιχούν στους μαθητές που εξετάζουμε. Η παράσταση αυτή των σημείων καλείται **διάγραμμα διασποράς** (scatter diagram), βλέπε σχήμα 16.



Διάγραμμα διασποράς και ευθεία προσαρμοσμένη “με το μάτι”  
για τα δεδομένα του πίνακα 10.

Η προσεκτική παρατήρηση ενός διαγράμματος διασποράς μπορεί να μας δώσει σημαντικές πληροφορίες για τη σχέση εξάρτησης που ενδεχομένως υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών τις οποίες εξετάζουμε. Η πείρα μας λέει ότι υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του ύψους και του βάρους κάθε μαθητή. Στο παράδειγμα αυτό το διάγραμμα διασποράς δείχνει, γενικά, ότι οι ψηλοί μαθητές είναι συνήθως και πιο βαρείς. Για παράδειγμα, ο Ν είναι ψηλότερος και βαρύτερος από τον Κ, ο Π είναι ψηλότερος και βαρύτερος από τον Κ, αλλά υπάρχουν και εξαιρέσεις, όπως ο Π είναι ψηλότερος από τον Ν αλλά ο Ν είναι βαρύτερος από τον Π.

## Ευθεία Παλινδρόμησης

Από το διάγραμμα διασποράς του προηγούμενου παραδείγματος φαίνεται καθαρά ότι υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο ύψος  $X$  και το βάρος  $Y$  των 18 αγοριών της Γ' Λυκείου. Τα σημεία  $(x, y)$  είναι συγκεντρωμένα περίπου γύρω από μία ευθεία, δηλαδή η σχέση μεταξύ των  $X$  και  $Y$  είναι κατά προσέγγιση γραμμική. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μπορούμε να θεωρήσουμε τη μία μεταβλητή ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την άλλη ως εξαρτημένη. Εδώ θεωρούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή το ύψος  $X$  και ως εξαρτημένη μεταβλητή το βάρος  $Y$ , οπότε η ευθεία που θα προσαρμόζεται καλύτερα στα σημεία αυτά καλείται **ευθεία παλινδρόμησης της  $Y$  πάνω στη  $X$** .

Όπως γνωρίζουμε, η εξίσωση μιας ευθείας δίνεται από τη σχέση:

$$y = \alpha + \beta x \quad (1)$$

όπου  $\alpha$  και  $\beta$  είναι παράμετροι τις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε ή, όπως λέμε, να “εκτιμήσουμε”, έτσι ώστε η ευθεία που θα προκύψει να μας δίνει όσο το δυ-

νατόν την καλύτερη περιγραφή της σχέσης (εξάρτησης) που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών  $X$  και  $Y$ . Η παράμετρος  $\alpha$  μας δίνει το σημείο,  $(0, \alpha)$  όπου η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα  $y'y$ , ενώ η παράμετρος  $\beta$  παριστάνει το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας.

Ο πιο εύκολος τρόπος χάραξης της ευθείας είναι αυτός που γίνεται “με το μάτι”. Μια τέτοια ευθεία έχουμε φέρει και στο διάγραμμα διασποράς του σχήματος 16. Για να βρούμε τα  $\alpha$  και  $\beta$ , εργαζόμαστε ως εξής:

- Επιλέγουμε δύο σημεία, έστω τα  $\Gamma(173, 67)$  και  $\Sigma(191, 86)$  πάνω στην ευθεία που φέραμε “με το μάτι”.
- Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες  $(x, y)$  των σημείων αυτών στην (1), οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha + \beta x_1 \\ y_2 = \alpha + \beta x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 67 = \alpha + 173\beta \\ 86 = \alpha + 191\beta \end{cases}$$

- Επιλύοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε  $\alpha = -115,6$  και  $\beta = 1,06$  οπότε η εξίσωση της ευθείας (1) γίνεται:

$$y = -115,6 + 1,06x. \quad (2)$$

Επομένως, η ευθεία που κατά τη γνώμη μας προσαρμόζεται καλύτερα στα σημεία του διαγράμματος διασποράς διέρχεται από το σημείο  $(0, -115,6)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης 1,06.

## Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

Είδαμε ότι η πιο απλή διαδικασία προσαρμογής μιας ευθείας γραμμής σε ένα διάγραμμα διασποράς είναι “με το μάτι”. Αυτή όμως έχει πολλά μειονεκτήματα παρά την απλότητά της. Το κυριότερο είναι η έλλειψη αντικειμενικότητας, αφού διάφορα άτομα μπορούν να χαράξουν διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες. Ακόμα και το ίδιο άτομο μπορεί να χαράζει διαφορετικές ευθείες κάθε φορά. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια ακριβέστερη μέθοδο για την προσαρμογή μιας ευθείας γραμμής σε τέτοιου είδους δεδομένα.

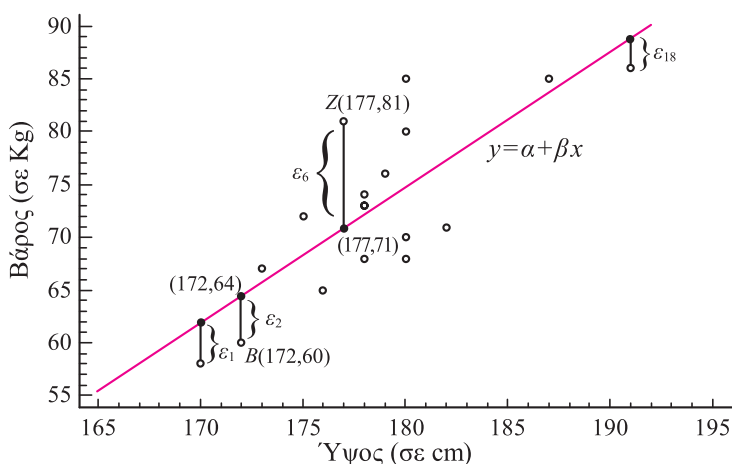
Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$ , άρα και για την εύρεση της εξίσωσης της καλύτερης ευθείας που προσαρμόζεται στα δεδομένα, είναι η “**μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων**”.

Η πρώτη αναφορά με ολοκληρωμένη ανάπτυξη της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων εμφανίζεται το 1805 σε μια εργασία του Γάλλου μαθηματικού Legendre, (1752-1833) και αμέσως μετά από το Γερμανό μαθηματικό Gauss, (1777-1855) στην αστρονομική του πραγματεία “Theoria Motus” για τον προσ-

διορισμό της τροχιάς του μικρού πλανήτη Δήμητρα. Μάλιστα εδώ ο Gauss αναφέρει ότι χρησιμοποίησε την αρχή των ελαχίστων τετραγώνων πριν από το 1794 (σε ηλικία μόλις 17 ετών), έτσι ώστε να προηγείται του Legendre ως προς την ανακάλυψη αυτής της μεθόδου.

Ας δούμε ξανά το διάγραμμα διασποράς στο σχήμα 17 του προηγούμενου παραδείγματος για τα ύψη  $X$  και τα βάρη  $Y$  των 18 μαθητών του πίνακα 10. Στο διάγραμμα αυτό έχουμε φέρει και μία ευθεία  $y = \alpha + \beta x$ , που πιστεύουμε ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα σημεία  $(x_i, y_i)$  για τις  $n = 18$  συνολικά μετρήσεις των μεταβλητών  $X$  και  $Y$ .

17



Προσαρμογή ευθείας ελαχίστων τετραγώνων στο διάγραμμα διασποράς του δεδομένων του πίνακα 10.

Έτσι, για παράδειγμα, για το μαθητή  $B$ , σημείο  $B(172, 60)$ , με ύψος  $x_2 = 172$  cm έχουμε βρει, όπως φαίνεται στον πίνακα 10, βάρος  $y_2 = 60$  kg, ενώ, σύμφωνα με την ευθεία που φέραμε, το βάρος του αναμένεται να είναι (περίπου) 64 kg, έχουμε δηλαδή ένα σφάλμα  $\varepsilon_2 = 60 - 64 = -4$ , δηλαδή βάρος 4 kg λιγότερο από το αναμενόμενο. Ομοίως για το μαθητή  $Z$ , σημείο  $Z(177, 81)$ , το βάρος του που μετρήθηκε ήταν  $y_6 = 81$  kg, ενώ το αναμενόμενο βάρος του σύμφωνα με την ευθεία που φέραμε είναι 71 kg, έχουμε δηλαδή ένα σφάλμα  $\varepsilon_6 = 81 - 71 = 10$ , δηλαδή βάρος 10 kg περισσότερο από το αναμενόμενο.

Ανάλογα σφάλματα υπολογίζονται και για τους άλλους μαθητές. Θα θέλαμε λοιπόν να βρούμε με κάποια μέθοδο εκείνη την ευθεία  $y = \alpha + \beta x$ , έτσι ώστε τα σφάλματα που προκύπτουν να είναι όσο το δυνατόν μικρότερα.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων συνίσταται στον προσδιορισμό των παραμέτρων  $\alpha, \beta$ , έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των

κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων  $(x_i, y_i)$  από την ευθεία  $y = \alpha + \beta x$ , δηλαδή το

$$\sum_{i=1}^v \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^v (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \quad (4)$$

να γίνεται ελάχιστο.

Οι τιμές των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$ , που ελαχιστοποιούν την (4), καλούνται **εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων** (least square estimators), συμβολίζονται με  $\hat{\alpha}$  (“α καπέλο”) και  $\hat{\beta}$  (“β καπέλο”), αντιστοίχως, και αποδεικνύεται (η απόδειξη εδώ παραλείπεται) ότι δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\beta} = \frac{v \sum_{i=1}^v x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^v x_i \right) \left( \sum_{i=1}^v y_i \right)}{v \sum_{i=1}^v x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^v x_i \right)^2} \quad (5)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$$

$$\text{όπου } \bar{y} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v y_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i.$$

Η ευθεία

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x \quad (6)$$

καλείται **ευθεία ελαχίστων τετραγώνων** ή **ευθεία παλινδρόμησης** της  $Y$  (πάνω) στη  $X$ . Αντικαθιστώντας το  $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$  στη σχέση (6) βρίσκουμε την

$$\hat{y} - \bar{y} = \hat{\beta} (x - \bar{x}),$$

η οποία φανερώνει ότι η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων  $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$  διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες  $(\bar{x}, \bar{y})$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης το  $\hat{\beta}$ . Αντικαθιστώντας τις τιμές  $x_i$  και  $y_i$  από τον πίνακα 10 στις σχέσεις (5) βρίσκουμε:

$$\hat{\beta} = 1,28 \text{ και } \hat{\alpha} = -156,1$$

οπότε η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα είναι από τη σχέση (6), η

$$\hat{y} = -156,1 + 1,28x.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει σημαντική διαφορά από την ευθεία  $y = -115,6 + 1,06x$  που προσαρμόσαμε “με το μάτι” στο σχήμα 16.

## Ερμηνεία των $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$

Στην εξίσωση ελαχίστων τετραγώνων  $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$  η τιμή της εκτιμήτριας  $\hat{a}$  της παραμέτρου  $a$  παριστάνει την τεταγμένη του σημείου στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα  $y'y$ , δηλαδή την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής  $Y$  όταν  $x = 0$ . Όταν το  $\hat{a} = 0$  τότε η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Έστω τώρα δυο τιμές  $x_1$  και  $x_2 = x_1 + 1$  της ανεξάρτητης μεταβλητής. Τότε λαμβάνοντας τη διαφορά των αντίστοιχων προβλεπόμενων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής βρίσκουμε

$$\hat{y}_2 - \hat{y}_1 = (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_2) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_1) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_1 + 1) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_1) = \hat{\beta}$$

δηλαδή  $\hat{y}_2 = \hat{y}_1 + \hat{\beta}$ . Συνεπώς ο συντελεστής διεύθυνσης  $\hat{\beta}$  της ευθείας  $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}x$  παριστά τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής  $Y$  όταν το  $X$  μεταβληθεί κατά μια μονάδα. Έτσι, όταν το  $x$  αυξηθεί κατά μια μονάδα τότε το  $\hat{y}$  αυξάνεται κατά  $\hat{\beta}$  μονάδες όταν  $\hat{\beta} > 0$  ή ελαττώνεται κατά  $\hat{\beta}$  μονάδες όταν  $\hat{\beta} < 0$ .

---

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Ένας ερευνητής, για να εξετάσει την επίδραση ενός αναισθητικού, εμβολίασε 10 ποντίκια με διαφορετική δόση κάθε φορά. Οι χρόνοι που μεσολάβησαν ώσπου τα ποντίκια να χάσουν τις αισθήσεις τους (λιποθυμήσουν) καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

| Δόση (σε mgr)              | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 |
|----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Χρόνος<br>λιποθυμίας (sec) | 12,5 | 11,5 | 11   | 8,5  | 7    | 6    | 5    | 4    | 2,5  | 2    |

α) Να γίνει το διάγραμμα διασποράς

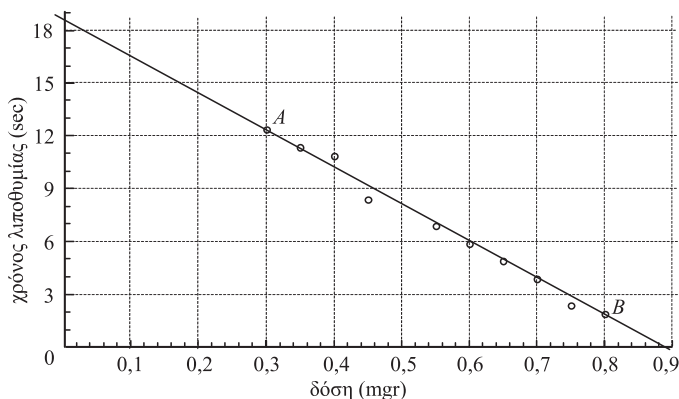
β) Να επιλεγούν δύο πιθανά σημεία από τα οποία διέρχεται η προσαρμοσμένη ευθεία παλινδρόμησης και με βάση αυτά να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας.

γ) Ύστερα από πόσο χρόνο αναμένεται να λιποθυμήσει ένα ποντίκι, εάν του γίνει ένεση (εμβολιαστεί) με 0, 0,5, 1 mgr αναισθητικού, αντίστοιχα;  
Να σχολιαστούν τα αποτελέσματα.

## ΛΥΣΗ

α) Η περίπτωση που εξετάζεται εδώ αναφέρεται σε μια πειραματική κατάσταση, κατά την οποία ο ερευνητής καθορίζει εκ των προτέρων τη δόση του αναισθητικού που θα δώσει στα πειραματόζωα και μετρά τις αντιδράσεις τους. Ενδιαφέρεται δηλαδή να προσδιορίσει μια σχέση δόσης αναισθητικού και χρόνου λιποθυμίας. Έτσι, η δόση αναισθητικού παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή ( $X$ ) και ο χρόνος λιποθυμίας την εξαρτημένη μεταβλητή ( $Y$ ).

Επομένως, το διάγραμμα διασποράς παριστάνεται παρακάτω:



β) Δύο σημεία από τα οποία εκτιμάται “με το μάτι” ότι θα διέρχεται η καλύτερη ευθεία παλινδρόμησης είναι τα  $A(0,3, 12,3)$  και  $B(0,8, 1,9)$ . Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ευθείας  $y = \alpha + \beta x$  έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 12,3 = \alpha + 0,3\beta \\ 1,9 = \alpha + 0,8\beta, \end{cases}$$

από την επίλυση του οποίου βρίσκουμε  $\alpha = 18,5$  και  $\beta = -20,8$ , οπότε η ευθεία παλινδρόμησης έχει εξίσωση

$$y = 18,5 - 20,8x.$$

Παρατηρούμε, όπως άλλωστε αναμενόταν και από το διάγραμμα διασποράς, ότι ο συντελεστής διεύθυνσης είναι αρνητικός, δηλαδή έχουμε αρνητική εξάρτηση του χρόνου λιποθυμίας ως προς τη δόση αναισθητικού. Μεγαλύτερη δόση επιφέρει γρηγορότερη (σε μικρότερο χρόνο) λιποθυμία.

γ) Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις τιμές της δόσης  $x = 0, 0,5$  και  $1$  mgr, βρίσκουμε τον προβλεπόμενο χρόνο λιποθυμίας του ποντικού  $y = 18,5, 8,1$  και  $-2,3$  sec, αντίστοιχα.

## ΣΧΟΛΙΟ

Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται εδώ δυο παράδοξα:

- Μηδενική δόση του αναισθητικού προκαλεί λιποθυμία σε 18,5 sec.

Υποθέτουμε όμως εδώ ότι τα ποντίκια χάνουν τις αισθήσεις τους μόνο από τη δόση του αναισθητικού και όχι από το φόβο τους!

- Δόση αναισθητικού 1 mgf προκαλεί λιποθυμία σε  $-2,3$  sec. Όμως και πάλι εδώ υποθέτουμε ότι η ένεση γίνεται σε ποντίκι που έχει τις αισθήσεις του και όχι να είναι πριν από 2,3 sec λιπόθυμο!

Οι δύο αυτές παρατηρήσεις οδηγούν στο βασικό συμπέρασμα ότι οι προβλέψεις της εξαρτημένης μεταβλητής έχουν νόημα, είναι δηλαδή δυνατές, μόνο για τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής οι οποίες βρίσκονται στο διάστημα που έχουμε εξετάσει ή τουλάχιστον πολύ κοντά στα άκρα του διαστήματος αυτού.

**2. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις πωλήσεις (ζήτηση) ενός προϊόντος (π.χ. των κερασιών)  $Y$  (σε κιλά) από το ψαράδικο μιας περιοχής και τις αντίστοιχες τιμές  $X$  του προϊόντος σε ευρώ ανά κιλό για μια ορισμένη χρονική περίοδο**

| Τιμή ψαριών ανά κιλό<br>(σε ευρώ), $X$ | 15 | 13 | 11 | 9  | 9 | 6  | 5  | 4  |
|----------------------------------------|----|----|----|----|---|----|----|----|
| Πωλήσεις σε κιλά, $Y$                  | 5  | 6  | 8  | 10 | 9 | 12 | 15 | 11 |

- α) Να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων  $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$  (των πωλήσεων σε συνάρτηση με την τιμή) και να χαραχτεί στο αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.
- β) Να ερμηνευθεί η έννοια των  $\hat{\alpha}$  και  $\hat{\beta}$
- γ) Ποια είναι η αναμενόμενη ζήτηση (πωλήσεις), όταν η τιμή είναι 8 ευρώ/κιλό;
- δ) Με βάση την ευθεία αυτή μπορούμε να προβλέψουμε την τιμή του προϊόντος, όταν η ζήτηση είναι 10 κιλά;

### ΛΥΣΗ

- α) Για τον προσδιορισμό της εξίσωσης της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων διευκολύνει ο διπλανός πίνακας με τις απαραίτητες πράξεις.  
Επομένως, έχουμε:

$$n = 8$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{72}{8} = 9$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{76}{8} = 9,5$$

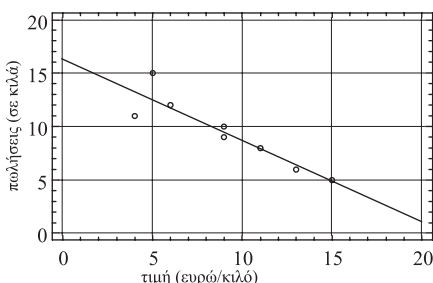
| $x$             | $y$             | $x^2$              | $xy$              |
|-----------------|-----------------|--------------------|-------------------|
| 15              | 5               | 225                | 75                |
| 13              | 6               | 169                | 78                |
| 11              | 8               | 121                | 88                |
| 9               | 10              | 81                 | 90                |
| 9               | 9               | 81                 | 81                |
| 6               | 12              | 36                 | 72                |
| 5               | 15              | 25                 | 75                |
| 4               | 11              | 16                 | 44                |
| $\Sigma x = 72$ | $\Sigma y = 76$ | $\Sigma x^2 = 754$ | $\Sigma xy = 603$ |

$$\hat{\beta} = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{8(603) - (72)(76)}{8(754) - (72)^2} = \frac{-648}{848} = -0,76$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 9,5 + (0,76)(9) = 16,34.$$

Άρα, η εξίσωση της ζήτησης (των ψαριών) σε συνάρτηση με την τιμή τους είναι  $\hat{y} = 16,34 - 0,76x$ .

Επειδή γνωρίζουμε ότι η ευθεία διέρχεται από τα σημεία  $(0, \hat{\alpha})$  και  $(\bar{x}, \bar{y})$ , είναι εύκολο να χαραχτεί στο διάγραμμα διασποράς, όπως φαίνεται δίπλα.



β) Το  $\hat{\alpha} = 16,34$  προσδιορίζει την προβλεπόμενη ζήτηση του προϊόντος, όταν η τιμή του είναι 0 ευρώ/κιλό. Προφανώς εδώ τέτοια περίπτωση δεν είναι ρεαλιστική.

Το  $\hat{\beta}$  προσδιορίζει τη μεταβολή που επέρχεται στην εξαρτημένη μεταβλητή  $Y$ , όταν η  $X$  μεταβληθεί κατά μία μονάδα. Δηλαδή όταν η τιμή των ψαριών αυξηθεί κατά 1 ευρώ/κιλό (μία μονάδα), οι πωλήσεις θα ελαττωθούν κατά 0,76 κιλά.

γ) Όταν η αξία του προϊόντος είναι 8 ευρώ/κιλό, σημαίνει ότι  $x = 8$ . Συνεπώς, για  $x = 8$  η αναμενόμενη ζήτηση  $\hat{y}$  είναι

$$\hat{y} = 16,34 - 0,76 \cdot 8 = 16,34 - 6,08 = 10,26 \text{ κιλά.}$$

δ) Προφανώς, στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση της ευθείας παλινδρόμησης της εξαρτημένης μεταβλητής  $Y$  πάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή  $X$ , δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προκύπτουσα ευθεία για πρόβλεψη της  $X$ , όταν δίνεται το  $Y$ . Για να γίνει κάτι τέτοιο, πρέπει εξ αρχής να εκτιμηθεί η ευθεία παλινδρόμησης της  $X$  πάνω στην  $Y$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που προσαρμόζεται (με το μάτι) καλύτερα στα δεδομένα.

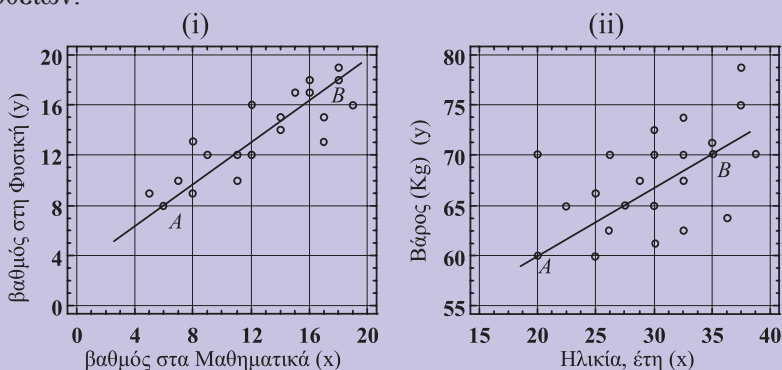
α)

|     |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|
| $x$ | 12 | 15 | 16 | 18 | 18 |
| $y$ | 13 | 14 | 18 | 18 | 20 |

β)

|     |    |    |    |   |   |   |   |   |   |
|-----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y$ | 12 | 10 | 10 | 6 | 6 | 3 | 5 | 2 | 4 |

2. Παρακάτω δίνονται δύο διαγράμματα διασποράς με τις προσαρμοσμένες ευθείες, όπως τις χάραξε “με το μάτι” ένας μαθητής. Χρησιμοποιώντας τα σημεία A και B να βρείτε τις εξισώσεις  $y = \alpha + \beta x$  των αντίστοιχων ευθειών.



3. Για καθένα από τα παρακάτω ζεύγη τιμών να βρείτε την εξίσωση ελαχίστων τετραγώνων  $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$  και να τη χάραξετε στο αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς. Στη συνέχεια να προβλέψετε την τιμή της  $y$ , όταν  $x = 6$ .

α)

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

β)

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

γ)

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ | 4 | 2 | 5 | 1 | 3 |

δ)

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ | 3 | 1 | 5 | 2 | 4 |

4. Να εφαρμόσετε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα της εφαρμογής 1, για να εκτιμήσετε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης του χρόνου λιποθυμίας ( $Y$ ) των ποντικών στη δόση αναισθητικού ( $X$ ). Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα που προκύπτουν με τη μέθοδο αυτή με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν με την προσαρμογή της ευθείας “με το μάτι”.
5. α) Με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων να βρείτε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της  $Y$  πάνω στη  $X$  για τα παρακάτω δεδομένα 5 μαθητών.

|                             |    |    |    |    |    |
|-----------------------------|----|----|----|----|----|
| Επίδοση στα Μαθηματικά, $x$ | 12 | 15 | 16 | 18 | 18 |
| Επίδοση στη Φυσική, $y$     | 13 | 14 | 18 | 18 | 20 |

- β) Αν υποθέσουμε ότι χάθηκε ο βαθμός της Φυσικής για το μαθητή που πήρε 15 στα Μαθηματικά και για να μην υποχρεωθεί ο μαθητής να ξαναδώσει εξετάσεις στη Φυσική, ποιο βαθμό, κατά τη γνώμη σας, πρέπει να πάρει;

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα αποτελέσματα των μετρήσεων της συστολικής πίεσης και της ηλικίας 10 γυναικών:

|               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ηλικία (έτη)  | 25  | 30  | 35  | 40  | 45  | 50  | 55  | 60  | 65  | 70  |
| Πίεση (mm Hg) | 116 | 117 | 121 | 147 | 111 | 133 | 105 | 153 | 155 | 176 |

- α) Ποια από τις δύο μεταβλητές ηλικία και συστολική πίεση μπορεί να θεωρηθεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή;
- β) Να γίνει το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.
- γ) Να χαράξετε “με το μάτι” την ευθεία που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.
- δ) Τι συστολική πίεση προβλέπετε για μια γυναίκα 75 ετών;
2. Να χρησιμοποιήσετε τα δεδομένα του Πίνακα 4 μόνο για τα αγόρια, για να προβλέψετε το ύψος ενός μαθητή όταν:
- α) ο πατέρας του έχει ύψος 180 cm
- β) ο μέσος όρος του ύψους των γονιών του είναι 170 cm.
3. Να χρησιμοποιήσετε τα δεδομένα του Πίνακα 4 μόνο για τα κορίτσια, για να προβλέψετε το ύψος μιας μαθήτριας όταν:
- α) η μητέρα της έχει ύψος 167 cm
- β) ο μέσος όρος του ύψους των γονιών της είναι 170 cm.
4. Από 8 γάμους που έγιναν σε μια εκκλησία κατά τη διάρκεια ενός μηνός, οι ηλικίες των ανδρογύνων ήσαν:

|                     |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Ηλικία γαμπρού, $y$ | 20 | 22 | 24 | 25 | 28 | 30 | 33 | 38 |
| Ηλικία νύφης, $x$   | 20 | 20 | 22 | 27 | 24 | 25 | 28 | 34 |

- α) Να υπολογίσετε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της  $Y$  πάνω στη  $X$  και να τη χαράξετε στο αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.

- β) Να βρείτε την αναμενόμενη ηλικία του γαμπρού για μια υποψήφια νύφη 25 ετών.
- γ) Για κάθε έτος που μια γυναίκα καθυστερεί να παντρευτεί πόσο αυξάνεται η ηλικία του υποψήφιου γαμπρού.
5. Για τα ίδια δεδομένα της προηγούμενης άσκησης (4) να βρείτε:
- α) την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της  $X$  πάνω στη  $Y$ ,
- β) την αναμενόμενη ηλικία της νύφης για έναν υποψήφιο γαμπρό 28 ετών,
- γ) για κάθε έτος που ένας άνδρας καθυστερεί να παντρευτεί πόσο αυξάνεται η ηλικία της υποψήφιας νύφης;

## 2.5 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

### Εισαγωγή

Έχουμε δει μέχρι τώρα ότι ένα σύνολο παρατηρήσεων μιας μεταβλητής περιγράφεται με τα μέτρα θέσης και διασποράς, όπως για παράδειγμα, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση, αντιστοίχως. Επιπλέον, με τη γραμμική παλινδρόμηση που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πώς βρίσκουμε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης η οποία προσαρμόζεται καλύτερα στο “σμήνος” των σημείων όπως αυτά παριστάνονται σε ένα διάγραμμα διασποράς.

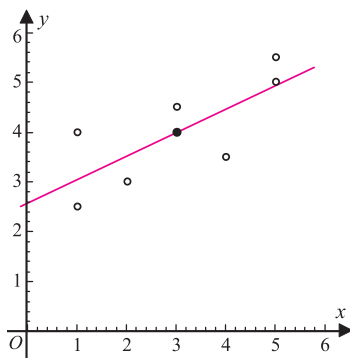
Ας δούμε, για παράδειγμα, τα παρακάτω ζεύγη τιμών  $(x_i, y_i)$  για τις μεταβλητές  $X, Y$  και  $(x'_i, y'_i)$  για τις μεταβλητές  $X', Y'$ :

| $x_i$ | $y_i$ |
|-------|-------|
| 1     | 2,5   |
| 1     | 4,0   |
| 2     | 3,0   |
| 3     | 4,5   |
| 3     | 4,0   |
| 4     | 3,5   |
| 5     | 5,5   |
| 5     | 5,0   |

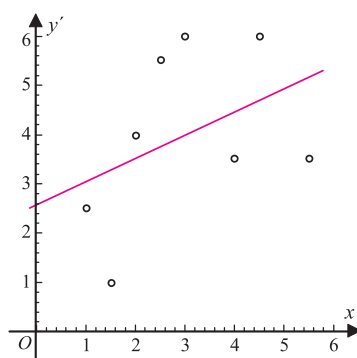
| $x'_i$ | $y'_i$ |
|--------|--------|
| 1,0    | 2,5    |
| 1,5    | 1,0    |
| 2,0    | 4,0    |
| 2,5    | 5,5    |
| 3,0    | 6,0    |
| 4,0    | 3,5    |
| 4,5    | 6,0    |
| 5,5    | 3,5    |

από τα οποία βρίσκουμε:

- $\bar{x} = 3, \bar{y} = 5, s_x = 1,5, s_y = 0,94$
- $\bar{x}' = 3, \bar{y}' = 5, s_{x'} = 1,46, s_{y'} = 1,66$
- το διάγραμμα διασποράς στο σχήμα 18(α) των σημείων  $(x_i, y_i)$  και την αντίστοιχη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων  $\hat{y} = 2,58 + 0,47x$
- το διάγραμμα διασποράς στο σχήμα 18(β) των σημείων  $(x'_i, y'_i)$  και την αντίστοιχη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων  $\hat{y}' = 2,58 + 0,47x'$ .



(α)



(β)

18

Στα δύο αυτά διαγράμματα διασποράς βλέπουμε ότι προσαρμόζεται η ίδια ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης. Όμως τα σημεία του σμήνους στο διάγραμμα (α) είναι περισσότερο συγκεντρωμένα γύρω από την ευθεία ενώ στο διάγραμμα (β) έχουμε ένα πιο χαλαρό σμήνος σημείων γύρω από την αντίστοιχη ευθεία παλινδρόμησης. Δηλαδή στην πρώτη περίπτωση η γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών είναι ισχυρότερη παρά στη δεύτερη περίπτωση. Ένα μέτρο που μας δίνει το μέγεθος της γραμμικής σχέσης ή το βαθμό συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από την ευθεία παλινδρόμησης είναι ο λεγόμενος **συντελεστής γραμμικής συσχέτισης** (linear correlation coefficient).

## Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών  $X$  και  $Y$  ορίζεται με βάση ένα δείγμα  $n$  ζευγών παρατηρήσεων  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  συμβολίζεται με  $r(X, Y)$  ή απλά με  $r$  και δίνεται από τον τύπο:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^v (y_i - \bar{y})^2}} \quad (1)$$

αναφέρεται δε και ως συντελεστής συσχέτισης του Pearson.

Από τον ορισμό του  $r$  παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές  $x_i$  της  $X$  και  $y_i$  της  $Y$  (μεγαλύτερες από τη μέση τιμή τους) οι διαφορές  $(x_i - \bar{x})$  και  $(y_i - \bar{y})$  είναι θετικές, οπότε το γινόμενό τους είναι θετικό. Όμοια για μικρές τιμές  $x_i$  και  $y_i$ , οι διαφορές  $(x_i - \bar{x})$  και  $(y_i - \bar{y})$  είναι αρνητικές, οπότε το γινόμενό τους είναι πάλι θετικό. Επομένως, όταν σε μεγάλες τιμές της μεταβλητής  $X$  αντιστοιχούν και μεγάλες τιμές της  $Y$ , ή σε μικρές τιμές της  $X$  αντιστοιχούν μικρές τιμές της  $Y$  τότε ο συντελεστής συσχέτισης είναι θετικός και λέμε ότι οι  $X$ ,  $Y$  είναι θετικά συσχετισμένες. Ανάλογα μπορούμε να δούμε ότι ο  $r$  παίρνει αρνητικές τιμές όταν σε μεγάλες τιμές της μιας μεταβλητής αντιστοιχούν μικρές τιμές της άλλης, οπότε λέμε ότι οι μεταβλητές αυτές είναι αρνητικά συσχετισμένες.

Με βάση τον παρακάτω πίνακα και τον τύπο (1) υπολογίζουμε το συντελεστή

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $y_i - \bar{y}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(y_i - \bar{y})^2$ | $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ |
|-------|-------|-----------------|-----------------|---------------------|---------------------|----------------------------------|
| 1     | 2,5   | -2              | -1,5            | 4                   | 2,25                | 3                                |
| 1     | 4,0   | -2              | 0               | 4                   | 0                   | 0                                |
| 2     | 3,0   | -1              | -1              | 1                   | 1                   | 1                                |
| 3     | 4,5   | 0               | 0,5             | 0                   | 0,25                | 0                                |
| 3     | 4,0   | 0               | 0               | 0                   | 0                   | 0                                |
| 4     | 3,5   | 1               | -0,5            | 1                   | 0,25                | -0,5                             |
| 5     | 5,5   | 2               | 1,5             | 4                   | 0,25                | 3                                |
| 5     | 5,0   | 2               | 1               | 4                   | 1                   | 2                                |
| 24    | 32    | 0               | 0               | 18                  | 7                   | 8,5                              |

γραμμικής συσχέτισης για τα δεδομένα του πρώτου παραδείγματος

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{8,5}{\sqrt{18}\sqrt{7}} \approx 0,76.$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε και το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης για τα δεδομένα του δεύτερου παραδείγματος όπου βρίσκουμε  $r' \approx 0,41$ .

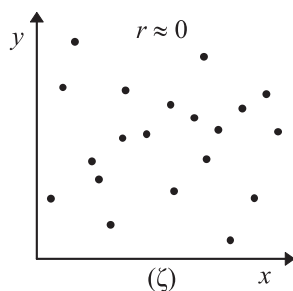
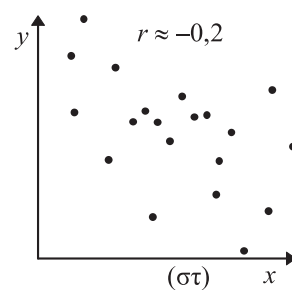
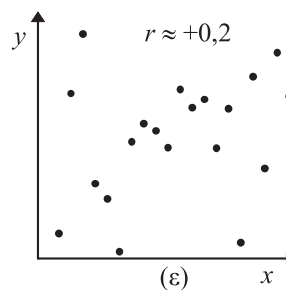
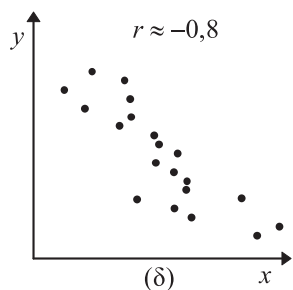
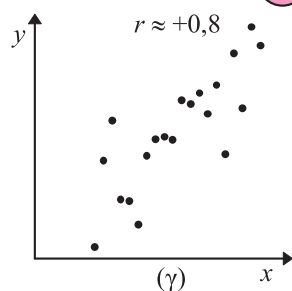
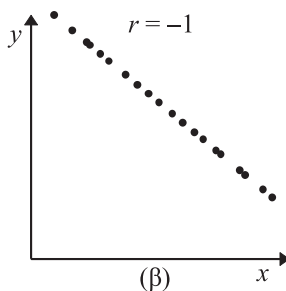
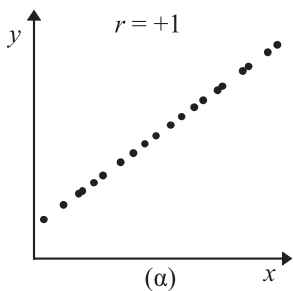
Συγκρίνοντας τους δύο συντελεστές συσχέτισης βλέπουμε ότι  $r > r'$ . Αυτό δηλώνει ότι οι μεταβλητές  $X, Y$  του πρώτου παραδείγματος είναι περισσότερο γραμμικά συσχετισμένες παρά οι μεταβλητές  $X', Y'$  του δεύτερου παραδείγματος.

Ο συντελεστής συσχέτισης είναι καθαρός αριθμός, δηλαδή δεν εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης, επομένως είναι ανεξάρτητος των χρησιμοποιούμενων μονάδων μέτρησης των μεταβλητών  $X$  και  $Y$ . Επί πλέον ισχύει πάντοτε ότι:

$$-1 \leq r \leq +1.$$

Πιο συγκεκριμένα όταν:

- $0 < r < +1$ , τότε οι  $X, Y$  είναι **θετικά** γραμμικά συσχετισμένες (σχήμα 19(γ), (ε))
- $-1 < r < 0$ , τότε οι  $X, Y$  είναι **αρνητικά** γραμμικά συσχετισμένες (σχήμα 19(δ), (στ))
- $r = +1$ , τότε έχουμε **τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση** και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με θετική κλίση (σχήμα 19(α)), δηλαδή  $y = \alpha + \beta x, \beta > 0$
- $r = -1$ , τότε έχουμε **τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση** και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με αρνητική κλίση (σχήμα 19(β)), δηλαδή  $y = \alpha + \beta x, \beta < 0$
- $r = 0$ , τότε **δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση** μεταξύ των μεταβλητών. Οι μεταβλητές δηλαδή  $X, Y$  είναι **γραμμικά ασυσχέτιστες** (σχήμα 19(ζ)).



Διαγράμματα διασποράς και συντελεστές συσχέτισης για διάφορα ζεύγη παρατηρήσεων  $(x_i, y_i)$ .

Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης  $r$  δίνεται ισοδύναμα και από τον παρακάτω τύπο, η χρήση του οποίου διευκολύνει συχνά τους υπολογισμούς κυρίως στην περίπτωση που οι  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  δεν είναι ακέραιοι:

$$r = \frac{v \sum_{i=1}^v x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^v x_i \right) \left( \sum_{i=1}^v y_i \right)}{\sqrt{v \sum_{i=1}^v x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^v x_i \right)^2} \sqrt{v \sum_{i=1}^v y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^v y_i \right)^2}} \quad (2)$$

## Συσχέτιση και Παλινδρόμηση

Η παλινδρόμηση και η συσχέτιση, όπως τις εξετάσαμε έως τώρα, είναι δύο διαδικασίες μελέτης διμεταβλητών πληθυσμών. Η παλινδρόμηση προσδιορίζει τη σχέση εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών, ενώ ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δίνει ένα μέτρο του μεγέθους της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών. Επομένως, οι δύο διαδικασίες δεν είναι άσχετες μεταξύ τους.

Όταν δεν έχουμε πειραματικά δεδομένα, να προκαθορίζονται δηλαδή οι τιμές της μιας μεταβλητής, τότε μπορεί να μελετηθεί είτε η εξάρτηση της  $Y$  από τη  $X$  είτε η εξάρτηση της  $X$  από την  $Y$ . Το πόσο έντονη είναι η σχέση εξάρτησης μεταξύ των δύο μεταβλητών μας το δίνει ο συντελεστής συσχέτισης. Όσο το  $r$  πλησιάζει στο  $+1$  τόσο τα σημεία του διαγράμματος διασποράς τείνουν να βρίσκονται σε μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης  $\hat{\beta} > 0$ . Όσο το  $r$  πλησιάζει στο  $-1$  τόσο τα σημεία τείνουν να βρίσκονται σε μια ευθεία με  $\hat{\beta} < 0$ . Όταν  $r \approx 0$ , τότε  $\hat{\beta} \approx 0$ . Συνήθως στις εφαρμογές εξετάζεται η συσχέτιση και η παλινδρόμηση μαζί, οπότε έχουμε πληρέστερη και πιο ολοκληρωμένη εξέταση των δύο μεταβλητών.

---

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί ο συντελεστής συσχέτισης  $r$  μεταξύ των μεταβλητών  $X$  και  $Y$  με βάση τις παρακάτω τιμές:

|     |    |    |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x$ | 10 | 13 | 17 | 21 | 25 | 28 | 30 |
| $y$ | 21 | 24 | 29 | 25 | 36 | 33 | 40 |

## ΛΥΣΗ

Για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των  $X$  και  $Y$  διευκολύνει ο παρακάτω πίνακας:

| $x$              | $y$              | $x^2$               | $y^2$               | $xy$               |
|------------------|------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| 10               | 21               | 100                 | 441                 | 210                |
| 13               | 24               | 169                 | 576                 | 312                |
| 17               | 29               | 289                 | 841                 | 493                |
| 21               | 25               | 441                 | 625                 | 525                |
| 25               | 36               | 625                 | 1296                | 900                |
| 28               | 33               | 784                 | 1089                | 924                |
| 30               | 40               | 900                 | 1600                | 1200               |
| $\Sigma x = 144$ | $\Sigma y = 208$ | $\Sigma x^2 = 3308$ | $\Sigma y^2 = 6468$ | $\Sigma xy = 4564$ |

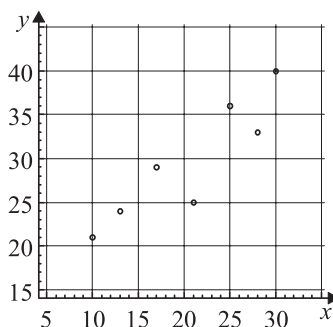
$\nu=7$

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$r = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \sqrt{n \sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$= \frac{7(4564) - (144)(208)}{\sqrt{7(3308) - (144)^2} \sqrt{7(6468) - (208)^2}} \approx 0,9.$$

Η υψηλή τιμή του  $r$  μας δείχνει ότι υπάρχει πολύ έντονη θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών  $X$  και  $Y$ , όπως εξάλλου μπορούμε να το διαπιστώσουμε και από το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να διατάξετε τις παρακάτω τιμές του  $r$  σε αύξουσα τάξη του βαθμού γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών:  $-0,6$ ,  $0,9$ ,  $-0,7$ ,  $0,2$ ,  $0$ ,  $-1$ .
2. Από τα διαγράμματα διασποράς των παρακάτω ζευγών  $(x_i, y_i)$  να εκτιμήσετε (χωρίς πράξεις) εάν η γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών  $X$  και  $Y$  είναι θετική ή αρνητική και επιπλέον αν είναι μικρή, μέτρια ή μεγάλη:

α)

|     |    |   |   |   |   |    |    |    |
|-----|----|---|---|---|---|----|----|----|
| $x$ | 1  | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| $y$ | -2 | 0 | 1 | 3 | 5 | 6  | 8  | 10 |

β)

|     |   |   |   |   |   |    |    |    |
|-----|---|---|---|---|---|----|----|----|
| $x$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| $y$ | 4 | 5 | 1 | 6 | 4 | 3  | 8  | 10 |

γ)

|     |    |   |   |   |   |    |    |    |
|-----|----|---|---|---|---|----|----|----|
| $x$ | 1  | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| $y$ | 10 | 8 | 3 | 4 | 6 | 3  | 2  | 5  |

$$\delta) \begin{array}{c|cccccccc} x & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 12 & 13 \\ \hline y & 10 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 12 \end{array}$$

$$\epsilon) \begin{array}{c|cccccccc} x & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 12 & 13 \\ \hline y & 6 & 8 & 6 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

3. Να υπολογίσετε τους συντελεστές γραμμικής συσχέτισης για τα ζεύγη τιμών  $(x_i, y_i)$  της προηγούμενης άσκησης και να τους συγκρίνετε με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις σας.
4. Να βρείτε τους συντελεστές γραμμικής συσχέτισης για τα παρακάτω ζεύγη τιμών και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

$$\alpha) \begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \end{array}$$

$$\beta) \begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

5. Για τέσσερα ζεύγη παρατηρήσεων  $(x_i, y_i)$  έχουμε:

$$\bar{x} = 7, \bar{y} = 4,5, \sum x_i^2 = 210, \sum y_i^2 = 92, \sum x_i y_i = 138.$$

Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης.

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης  $(x, y > 0)$ :

| $x$ | $y$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(y - \bar{y})^2$ | $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|------------------------------|
| 1   | 3   | 9                 | 1                 | 3                            |
| 2   | 6   |                   |                   |                              |
| -   | 1   |                   |                   |                              |
| 6   | -   |                   |                   |                              |
| 8   | 8   |                   |                   |                              |
| 9   | 13  |                   |                   |                              |
|     |     |                   |                   |                              |

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Η κατά άτομο κατανάλωση (σε γαλόνια) άπαχου ( $Y$ ) και πλήρους ( $X$ ) γάλακτος για τα έτη 1982-87 στις ΗΠΑ δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

|                  | Έτος |      |      |      |      |      |
|------------------|------|------|------|------|------|------|
|                  | 1982 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 |
| Πλήρες γάλα, $x$ | 15,6 | 15,2 | 14,7 | 14,3 | 13,4 | 12,8 |
| Άπαχο γάλα, $y$  | 10,8 | 11,1 | 11,5 | 12,1 | 12,8 | 13,2 |

- α) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε το συντελεστή συσχέτισης.  
 β) Αν μετατραπούν οι ποσότητες γάλακτος σε λίτρα, ποια θα είναι η τιμή του συντελεστή συσχέτισης; ( $1 \text{ γαλόνι} \approx 3,8 \text{ λίτρα}$ )
2. Τα παρακάτω δεδομένα παριστάνουν τους δείκτες ευφυΐας (I.Q.) 10 μητέρων ( $X$ ) και των θυγατέρων τους ( $Y$ ):

| I.Q. μητέρας | I.Q. θυγατέρας | I.Q. μητέρας | I.Q. θυγατέρας |
|--------------|----------------|--------------|----------------|
| 85           | 90             | 115          | 110            |
| 90           | 100            | 120          | 125            |
| 95           | 90             | 120          | 110            |
| 100          | 105            | 130          | 130            |
| 110          | 120            | 135          | 120            |

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς  
 β) Από το διάγραμμα διασποράς να εκτιμήσετε το συντελεστή συσχέτισης  
 γ) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε το συντελεστή συσχέτισης
3. α) Να δείξετε ότι  $\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^v x_i y_i - v \bar{x} \bar{y}$ .  
 β) Για επτά ζεύγη παρατηρήσεων  $(x_i, y_i)$  έχουμε  
 $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 28$ ,  $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 112$ ,  $\sum x_i y_i = 308$ ,  $\bar{x} = 4$ ,  $\bar{y} = 9$   
 Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης.
4. Σε μια εξέταση στα Μαθηματικά οκτώ μαθητών η βαθμολογία δύο εξεταστών Α, Β ήταν ως ακολούθως:

|           |   | Μαθητής |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------|---|---------|----|----|----|----|----|----|----|
|           |   | 1       | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| Εξεταστής | Α | 55      | 62 | 71 | 66 | 63 | 56 | 72 | 51 |
| Εξεταστής | Β | 54      | 56 | 61 | 66 | 63 | 61 | 73 | 54 |

Να εξετάσετε εάν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ της βαθμολογίας των δύο εξεταστών.

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ο αριθμός των παιδιών σε ένα δείγμα 80 οικογενειών μιας πόλης δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| Αριθμός Παιδιών | 0  | 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 |
|-----------------|----|----|----|----|---|---|---|
| Οικογένειες     | 10 | 25 | 20 | 12 | 6 | 5 | 2 |

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεση τιμή, την επικρατούσα τιμή και την τυπική απόκλιση του αριθμού των παιδιών.  
 β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.  
 γ) Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων να εκτιμήσετε τα τρία τεταρτημόρια.
2. Ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών που βρέθηκαν στις 60 σελίδες ενός κειμένου στην πρώτη του διόρθωση ήταν:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 2 | 6 | 7 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 4 | 0 |
| 6 | 4 | 0 | 0 | 2 | 3 | 1 | 1 | 4 | 5 | 4 | 3 | 3 | 7 | 6 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 8 |
| 3 | 9 | 3 | 1 | 0 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 5 |

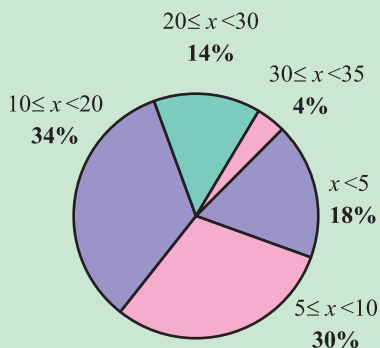
- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε ισοπλάτεις κλάσεις πλάτους δύο και να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.  
 β) Να κατασκευάσετε τα ιστογράμματα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων και τα αντίστοιχα πολύγωνα συχνοτήτων.  
 γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την κορυφή και την τυπική απόκλιση.
3. Σε μια εταιρεία συνολικά εργάζονται 200 άτομα. Όπως προέκυψε από ένα τυχαίο δείγμα υπαλλήλων, ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας τους δίνεται στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα.

- α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.

- β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

- γ) Πόσοι συνολικά υπάλληλοι αναμένονται να συνταξιοδοτηθούν (συμπληρώνοντας 35-ετία) μέσα στα επόμενα  
 i) 5 χρόνια, ii) 10 χρόνια;

- δ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



4. Τα εργατικά ατυχήματα που συνέβησαν το 1990 και το 1994 δίνονται στο διπλανό πίνακα (Στοιχεία Υπουργείου Εργασίας).

| Μήνες       | 1990 | 1994 |
|-------------|------|------|
| Ιαν.-Φεβρ.  | 1057 | 692  |
| Μαρ.-Απρ.   | 927  | 716  |
| Μάιος-Ιούν. | 1114 | 829  |
| Ιούλ.-Αυγ.  | 1020 | 783  |
| Σεπ.-Οκτ.   | 941  | 809  |
| Νοέμ.-Δεκ.  | 775  | 636  |
| Σύνολο      | 5834 | 4465 |

- α) Να απεικονίσετε τα δεδομένα σε ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων.  
 β) Πόσα ατυχήματα συνέβησαν κατά μέσο όρο για τα έτη 1990 και 1994;  
 γ) Το 1,4% των ατυχημάτων του 1990 και το 2,1% του 1994 ήταν θανατηφόρα. Πόσα ατυχήματα ήταν θανατηφόρα για τα αντίστοιχα έτη; Ποιο είναι το συμπέρασμά σας;

5. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τη διάρκεια ζωής δύο τύπων ηλεκτρικών συσκευών Α και Β σε χιλιάδες ώρες. Μια ηλεκτρική συσκευή τύπου Α στοιχίζει 230 ευρώ.

| A  | B  |
|----|----|
| 12 | 12 |
| 14 | 13 |
| 23 | 16 |
| 30 | 22 |
| 36 | 32 |

- α) Ποιου τύπου ηλεκτρική συσκευή θα προτιμήσετε, αν η μία ηλεκτρική συσκευή τύπου Β στοιχίζει:

i) 180 ευρώ ii) 190 ευρώ iii) 200 ευρώ.

Να αιτιολογήσετε σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

- β) Ποιου τύπου οι ηλεκτρικές συσκευές παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια λειτουργίας τους;

6. Σε δειγματοληπτική έρευνα που έγινε στις 15 χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε.Ε.) μία βδομάδα πριν και μία βδομάδα μετά το Συμβούλιο Κορυφής, (Σ.Κ.) που έγινε το Μάιο του 1998, τα ποσοστά των ατόμων που αισθάνονταν πολύ καλά πληροφορημένα για το ενιαίο νόμισμα (ευρώ) δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Χώρα     | Πριν το Σ.Κ. | Μετά το Σ.Κ. | Χώρα         | Πριν το Σ.Κ. | Μετά το Σ.Κ. |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Αυστρία  | 50           | 47           | Ισπανία      | 30           | 39           |
| Βέλγιο   | 55           | 55           | Ιταλία       | 49           | 39           |
| Βρετανία | 40           | 35           | Λουξεμβούργο | 56           | 62           |
| Γαλλία   | 61           | 72           | Ολλανδία     | 56           | 55           |
| Γερμανία | 44           | 48           | Πορτογαλία   | 18           | 20           |
| Δανία    | 51           | 53           | Σουηδία      | 40           | 38           |
| Ελλάδα   | 26           | 22           | Φινλανδία    | 45           | 45           |
| Ιρλανδία | 41           | 29           |              |              |              |

- α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε μορφή ραβδογράμματος.  
 β) Να βρεθεί το μέσο ποσοστό των πολύ καλά ενημερωμένων για τις 15 χώρες της Ε.Ε. πριν και μετά το Σ.Κ., υπολογίζοντας i) τον αριθμητικό

μέσο και ii) το σταθμικό μέσο ποσοστό με βάρη τους πληθυσμούς των 15 χωρών μελών της Ε.Ε. Ποιος από τους δύο μέσους είναι ο αντιπροσωπευτικότερος;

7. Στον παρακάτω πίνακα παριστάνονται οι χρόνοι (σε λεπτά και δευτερόλεπτα) των νικητών των Ολυμπιακών αγώνων στην κολύμβηση στα 400 μέτρα ελευθέρως (freestyle) ανδρών και γυναικών. Να δώσετε (για κάθε φύλο χωριστά) το χρονόγραμμα των δεδομένων αυτών. Τι συμπεράσματα βγάζετε;

| Έτος | Χρόνος<br>Ανδρών | Χρόνος<br>Γυναικών | Έτος | Χρόνος<br>Ανδρών | Χρόνος<br>Γυναικών |
|------|------------------|--------------------|------|------------------|--------------------|
| 1904 | 6:16.2           | —                  | 1956 | 4:27.3           | 4:54.6             |
| 1908 | 5:36.8           | —                  | 1960 | 4:18.3           | 4:50.6             |
| 1912 | 5:24.4           | —                  | 1964 | 4:12.2           | 4:43.3             |
| 1920 | 5:26.8           | —                  | 1968 | 4:09.0           | 4:31.8             |
| 1924 | 5:04.2           | 6:02.2             | 1972 | 4:00.3           | 4:19.4             |
| 1928 | 5:01.6           | 5:42.8             | 1976 | 3:51.9           | 4:09.9             |
| 1932 | 4:48.4           | 5:28.5             | 1980 | 3:51.3           | 4:08.8             |
| 1936 | 4:44.5           | 5:26.4             | 1984 | 3:51.2           | 4:07.1             |
| 1948 | 4:41.0           | 5:17.8             | 1988 | 3:47.0           | 4:03.9             |
| 1952 | 4:30.7           | 5:12.1             | 1992 | 3:45.0           | 4:07.2             |

Πηγή: The World Almanac and Book of Facts, 1994.

8. Οι κάτοικοι ανά  $km^2$  από το 1960 έως και το 1974 στην Ελλάδα ήταν:

|               |      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |      |    |    |    |    |
|---------------|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------|----|----|----|----|
| Κάτοικοι, $Y$ | 63   | 64 | 64 | 64 | 66 | 65 | 65 | 66 | 66 | 67 | 67   | 67 | 68 | 68 |    |
| Έτος, $X$     | 1960 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 1970 | 71 | 72 | 73 | 74 |

- α) Να εκτιμήσετε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της  $Y$  στη  $X$ , και να την παραστήσετε στο διάγραμμα διασποράς.  
 β) Το 1976 είχαμε 69,5 κατοίκους/ $km^2$ . Είναι αυτό αναμενόμενο;  
 (Υπόδειξη: Θεωρούμε ως έτος αναφοράς το 1960 με τιμή  $x=1$ ).

9. Ο συντελεστής γενικής θνησιμότητας (Σ.Γ.Θ.) της Ελλάδας για τα χρόνια 1931-1964 παρουσίασε την παρακάτω πορεία.

|              |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Έτος, $X$    | 1931 | 1936 | 1940 | 1950 | 1956 | 1961 | 1964 |
| Σ.Γ.Θ.%, $Y$ | 17,7 | 15,1 | 12,8 | 7,9  | 7,4  | 7,6  | 8,2  |

- α) Να χαράξετε “με το μάτι” την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης  $y = \alpha + \beta x$  στο διάγραμμα διασποράς και από την ευθεία αυτή να εκτιμήσετε το Σ.Γ.Θ. για το έτος 1965.  
 β) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δύο σημείων να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης και στη συνέχεια να εκτιμήσετε πάλι το Σ.Γ.Θ. για το έτος 1965. Συγκρίνετε με το προηγούμενο αποτέλεσμα.

γ) Να επαναλάβετε το ίδιο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

(Υπόδειξη: Για την ανεξάρτητη μεταβλητή  $X$  να θέσετε για το έτος 1931 ως τιμή το 1, οπότε για το 1936 το  $x = 6$  και για το 1965 το 35).

10. Ο παρακάτω πίνακας δίνει το ημερήσιο εισόδημα  $X$  και τις αντίστοιχες δαπάνες διατροφής  $Y$  πέντε υπαλλήλων, που πάρθηκαν τυχαία από μια εταιρεία.

|                                      |     |     |     |     |     |     |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Εισόδημα<br>(δεκάδες ευρώ),          | $X$ | 3,5 | 3,7 | 4,2 | 4,3 | 6,9 |
| Δαπάνες διατροφής<br>(δεκάδες ευρώ), | $Y$ | 1,1 | 1,5 | 1,8 | 1,5 | 2,5 |

- α) Με τη μέθοδο των “ελαχίστων τετραγώνων” να βρείτε την εξίσωση της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης των εξόδων διατροφής (πάνω) στο εισόδημα.
- β) Μια υπάλληλος της εταιρείας έχει ημερήσιο εισόδημα 50 ευρώ. Πόσο εκτιμάτε εσείς ότι θα ξοδεύει για διατροφή την ημέρα;
- γ) Αν γνωρίζετε ότι μια υπάλληλος ξοδεύει 30 ευρώ για διατροφή μπορείτε, με βάση τα παραπάνω, να προβλέψετε το ημερήσιο εισόδημά της;

11. Η ποσότητα  $s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$  καλείται συνδιακύμανση των μεταβλητών  $X$  και  $Y$ . Αν καλέσουμε με  $s_x^2$ ,  $s_y^2$  τις διακυμάνσεις των  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) \hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad \beta) r = \hat{\beta} \frac{s_x}{s_y}.$$

12. Ένας μαθητής γνώριζε ότι η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Φαρενάιτ ( $^{\circ}\text{F}$ ) με τους βαθμούς Κελσίου ( $^{\circ}\text{C}$ ) είναι γραμμική, δηλαδή  $F = \alpha + \beta C$ . Επειδή όμως δε θυμότανε τις σταθερές  $\alpha$ ,  $\beta$ , μέτρησε τη θερμοκρασία του δωματίου του σε πέντε διαφορετικές ώρες με δύο θερμομέτρα με κλίμακα σε  $^{\circ}\text{F}$  και  $^{\circ}\text{C}$ , αντίστοιχα, και πήρε τα παρακάτω ζεύγη τιμών:

|                    |    |    |    |    |    |
|--------------------|----|----|----|----|----|
| $^{\circ}\text{C}$ | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
| $^{\circ}\text{F}$ | 59 | 68 | 77 | 86 | 95 |

Να βρείτε τη σχέση  $\hat{F} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}C$  που συνδέει τις δύο κλίμακες θερμοκρασίας.

13. Δίνεται δείγμα  $n$  ζευγών  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  δύο μεταβλητών  $X$  και  $Y$  και έστω  $r(X, Y)$  ο συντελεστής συσχέτισης. Εάν  $Z = \lambda Y$  όπου  $\lambda$  θετική σταθερά, να δείξετε ότι ισχύει:

$$r(X, Z) = r(X, Y).$$

Τι γίνεται, εάν  $\lambda < 0$ ;

14. Ο αριθμός των διαζυγίων που εκδόθηκαν στην Κύπρο από το 1974 έως το 1994 δίνεται παρακάτω (Πηγή: Τμήμα Στατιστικής και Ερευνών Κύπρου).

| Έτος | $x$ | Αριθμός Διαζυγίων<br>$y$  | Έτος | $x$ | Αριθμός Διαζυγίων<br>$y$ |
|------|-----|---------------------------|------|-----|--------------------------|
| 1974 | 1   | 140                       | 1985 | 12  | 258                      |
| 1975 | 2   | 121                       | 1986 | 13  | 276                      |
| 1976 | 3   | 110                       | 1987 | 14  | 326                      |
| 1977 | 4   | 136                       | 1988 | 15  | 312                      |
| 1978 | 5   | 158                       | 1989 | 16  | 335                      |
| 1979 | 6   | 161                       | 1990 | 17  | 348                      |
| 1980 | 7   | 164                       | 1991 | 18  | 304                      |
| 1981 | 8   | 175                       | 1992 | 19  | 433                      |
| 1982 | 9   | 216                       | 1993 | 20  | 504                      |
| 1983 | 10  | 262                       | 1994 | 21  | 555                      |
| 1984 | 11  | 250                       |      |     |                          |
|      |     | Δίνονται: $n = 21$        |      |     | $\Sigma x^2 = 3.311$     |
|      |     | $\Sigma y^2 = 17.726.800$ |      |     | $\Sigma x = 231$         |
|      |     |                           |      |     | $\Sigma y = 5.544$       |
|      |     |                           |      |     | $\Sigma xy = 75.512$     |

Να βρείτε την ευθεία “ελαχίστων τετραγώνων” και να εκτιμήσετε τον αριθμό των διαζυγίων για τα έτη 1995, 2000.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Στις ερωτήσεις 1-10 να βάλετε σε κύκλο το Σ (Σωστό) ή το Λ (Λάθος).

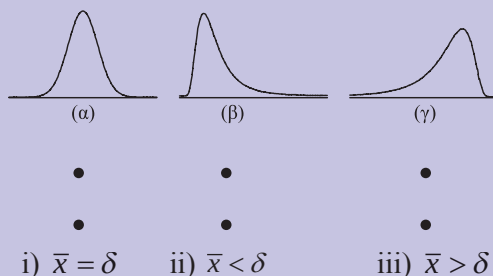
1. Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα. Σ Λ
2. Όταν έχουμε συμμετρική κατανομή, η μέση τιμή συμπίπτει με τη διάμεσο. Σ Λ
3. Όταν έχουμε ακραίες παρατηρήσεις, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή αντί της διαμέσου. Σ Λ
4. Ο λόγος της μέσης τιμής προς την τυπική απόκλιση καλείται συντελεστής μεταβολής και είναι καθαρός αριθμός. Σ Λ
5. Όταν προσθέσουμε μια σταθερά στις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυξάνουν κατά τη σταθερά αυτή. Σ Λ
6. Όταν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές μιας μεταβλητής επί μια σταθερά, τότε η μέση τιμή πολλαπλασιάζεται επί την ίδια σταθερά. Σ Λ
7. Όταν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές μιας μεταβλητής επί μια σταθερά, τότε η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται επί την ίδια σταθερά. Σ Λ
8. Η διάμεσος και το δεύτερο τεταρτημόριο έχουν πάντα την ίδια τιμή. Σ Λ
9. Το βάρος της ζάχαρης που βάζουμε στους καφέδες είναι ποιοτική μεταβλητή, γιατί χαρακτηρίζει τον καφέ σκέτο, μέτριο ή γλυκό. Σ Λ
10. Η σχετική συχνότητα μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Σ Λ
11. Για την ανεξάρτητη μεταβλητή οι παρατηρήσεις είτε προκαθορίζονται είτε λαμβάνονται χωρίς να υπεισέρχεται σφάλμα μέτρησης. Σ Λ
12. Η  $\beta$  παριστάνει την αύξηση της εξαρτημένης μεταβλητής, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή αυξηθεί κατά μία μονάδα. Σ Λ
13. Ένας συντελεστής συσχέτισης  $r = +0,6$  δείχνει μεγαλύτερη γραμμική συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών παρά ο  $r = -0,9$ . Σ Λ



21. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης  $r$  και ο συντελεστής  $\hat{\beta}$  στην ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης  $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$  έχουν:
- A. πάντα το ίδιο πρόσημο  
 B. πάντα διαφορετικό πρόσημο  
 Γ. άλλοτε το ίδιο πρόσημο και άλλοτε διαφορετικό  
 Δ. δεν έχουν καμιά σχέση ως προς το πρόσημό τους.
22. Εάν  $r(X, Y) = 0$ , τότε οι  $X, Y$  είναι:
- A. ασυσχέτιστες  
 B. γραμμικά ασυσχέτιστες  
 Γ. τέλεια θετικά συσχετισμένες  
 Δ. τέλεια αρνητικά συσχετισμένες.
23. Στην παλινδρόμηση με  $\hat{y}$  συμβολίζουμε:
- A. τις πραγματικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής  
 B. τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής  
 Γ. τις προβλεπόμενες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής, που προκύπτουν από την εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης  
 Δ. κανένα από τα παραπάνω.
24. Οι μεταβλητές  $X, Y$  έχουν συντελεστή συσχέτισης  $r_1 = +0,9$ , ενώ οι  $Z, W$  έχουν συντελεστή συσχέτισης  $r_2 = +0,3$ .
- A. Οι  $X, Y$  είναι τριπλάσια συσχετισμένες από τις  $Z, W$   
 B. Οι  $X, Y$  είναι περισσότερο (σε μεγαλύτερο βαθμό) συσχετισμένες από τις  $Z, W$   
 Γ. Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε διαφορετικές μεταβλητές.

Στις ερωτήσεις 25-35 να γίνει αντιστοίχιση των (α), (β)... με τα (i), (ii), ..., όπου αυτή είναι δυνατή.

25.



26. α) 1 2 10 18 19 • • i)  $\bar{x} = 10, s \approx 7,5$   
 β) 18 19 20 21 22 • • ii)  $\bar{x} = 20, s \approx 7,5$   
 γ) 8 9 10 11 12 • • iii)  $\bar{x} = 10, s \approx 1,4$   
 • • iv)  $\bar{x} = 20, s \approx 1,4$   
 • • v)  $\bar{x} = 15, s \approx \sqrt{2}$ .

27. α) διάμεσος •  
 β) επικρατούσα τιμή • • i) μέτρο θέσης  
 γ) τυπική απόκλιση •  
 δ) εύρος • • ii) μέτρο διασποράς  
 ε) διακύμανση •  
 στ) μέση τιμή •

28. α) 5 7 8 10 13 24 • • i)  $\bar{x} = 9$   
 β) 1 2 8 9 9 25 • • ii)  $\delta = 9$   
 γ) 1 2 9 12 12 18 • • iii)  $M_0 = 9$

29. α) 10 11 12 13 14 • • i)  $\bar{x} < \delta$   
 β) 10 11 12 13 24 •  
 γ) 1 11 12 13 14 • • ii)  $\bar{x} = \delta$   
 δ) 20 21 22 23 24 •  
 ε) 30 33 36 39 42 • • iii)  $\bar{x} > \delta$

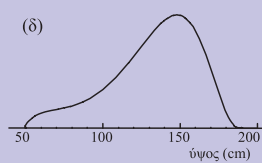
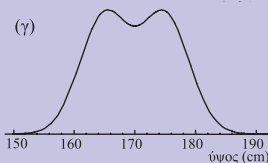
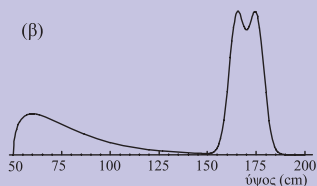
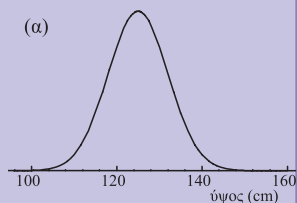
30. Παρακάτω δίνονται οι καμπύλες συχνοτήτων (α) έως (δ) τεσσάρων μεταβλητών (i) έως (iv) από μια μελέτη που έγινε σε κάποια πόλη.

i) Ύψος των μελών των νοικοκυριών στα οποία οι γονείς είναι και οι δύο κάτω των 24 ετών.

ii) Ύψος των παντρεμένων ζευγαριών.

iii) Ύψος όλων των ατόμων.

iv) Ύψος όλων των αυτοκινήτων.

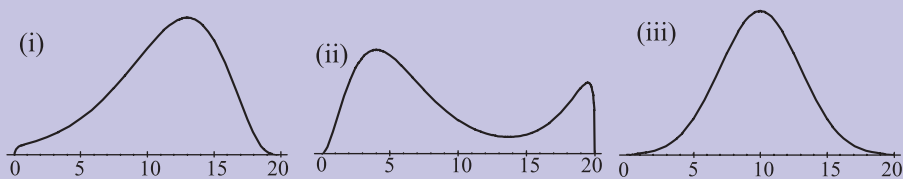


31. Παρακάτω δίνονται οι καμπύλες σχετικών συχνοτήτων ((i) έως (iii)) της βαθμολογίας τριών τμημάτων σε ένα διαγώνισμα, κατά το οποίο

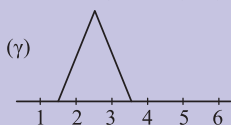
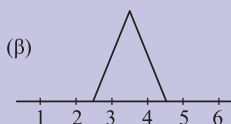
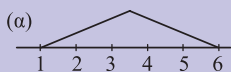
α) στο πρώτο τμήμα πέρασε το 50%

β) Στο δεύτερο τμήμα πέρασε ποσοστό άνω του 50%

γ) Στο τρίτο τμήμα πέρασε ποσοστό κάτω του 50%.



32. Παρακάτω δίνονται κατά προσέγγιση οι καμπύλες συχνοτήτων (α) έως (γ) τριών διαφορετικών συνόλων δεδομένων και διάφορες τιμές (i) έως (iv) της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης:



(i)  $\bar{x} \approx 3,5, \quad s \approx 1$

(ii)  $\bar{x} \approx 3,5, \quad s \approx 2$

(iii)  $\bar{x} \approx 2,5, \quad s \approx 1$

(iv)  $\bar{x} \approx 2,5, \quad s \approx 2.$

33.

(α)  $r \approx 0$

•

(β)  $r \approx 0.8$

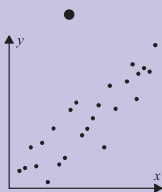
•

(γ)  $r = +1$

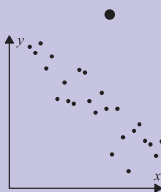
•

(δ)  $r \approx -0.8$

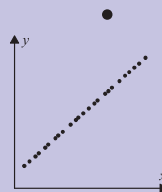
•



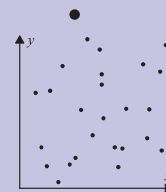
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

34.

$r = 0$

•

•

$\hat{\beta} = 0$

$r > 0$

•

•

$\hat{\beta} < 0$

$r < 0$

•

•

$\hat{\beta} > 0.$

35. Για την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης  $\hat{y} = 2x$  ισχύει:

$$\hat{\alpha} = 0$$

•

$$r > 0$$

•

•

Σωστό

$$\hat{\beta} = 2$$

•

•

Λάθος

$$r = \hat{\beta}$$

•

•

Δεν μπορούμε να ξέρουμε.

# 3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

---

## Εισαγωγή

Υπάρχει σε πολλούς η εντύπωση ότι το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων προήλθε από το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια. Σημαντική μάλιστα ώθηση στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού των Μαθηματικών αποτέλεσε η γόνιμη αλληλογραφία που αναπτύχθηκε ανάμεσα στους Pascal και Fermat το 17ο αιώνα με αφορμή διάφορα προβλήματα που προέκυψαν από την ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια.

Μολονότι όμως τα τυχερά παιχνίδια ήταν ευρέως διαδεδομένα και στους Αρχαίους Έλληνες και στους Ρωμαίους, η Θεωρία των Πιθανοτήτων δεν αναπτύχθηκε κατά την αρχαιότητα, όπως συνέβη με άλλους κλάδους των Μαθηματικών, αλλά πολύ αργότερα, το 16ο και 17ο αιώνα μ.Χ. Γι' αυτό πολλοί απορρίπτουν την άποψη ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων οφείλει τη γένεσή της στην ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια και την αποδίδουν στις ανάγκες να λυθούν προβλήματα που παρουσιάστηκαν με την ανάπτυξη του εμπορίου, των ασφαλίσεων, της συλλογής εσόδων του κράτους κτλ. Η ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων οφείλεται επίσης και στις ανάγκες των Φυσικών Επιστημών όπως η εφαρμογή της Θεωρίας Σφαλμάτων σε αστρονομικές παρατηρήσεις.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο το 18ο αιώνα με τις αξιοσημείωτες εργασίες των μαθηματικών Bernoulli, De Moivre, Laplace και Gauss. Ιδιαίτερα ο Laplace με τις εργασίες του άνοιξε μια καινούργια εποχή για τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Γιατί ο Laplace δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάλυση των τυχερών παιγνιδιών, αλλά εφαρμόζει τα συμπεράσματά του και σε ένα πλήθος από επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Έτσι, με αφορμή τη μελέτη των σφαλμάτων που προκύπτουν στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου αστρονομικού μεγέθους ανακαλύπτεται η περίφημη κανονική κατανομή του Gauss. Κατόπιν αποδεικνύεται ότι η κανονική κατανομή απεικονίζει όχι μόνο την κατανομή των σφαλμάτων των αστρονομικών παρατηρήσεων αλλά και την κατανομή πολλών βιολογικών, κοινωνικών και φυσικών φαινομένων. Έτσι, στη διάρκεια του 19ου αιώνα γεννιούνται νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων, τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική.

Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με τις εργασίες πολλών διάσημων μαθηματικών, όπως είναι οι Chebyshev, Markov, Von Mises, Kolmogorov κ.ά., έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο. Καινούργια θεωρητικά αποτελέσματα παρέχουν νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση των μεθόδων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων αναφέρονται σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως η Φυσική, η Χημεία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Οικονομολογία, η Τηλεπικοινωνία, η Μετεωρολογία κτλ.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ανήκει στους κλάδους των Μαθηματικών που συμβαδίζουν με την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο για τη λύση πρακτικών προβλημάτων των άλλων επιστημών. Απεναντίας έχει μετασχηματιστεί σε έναν αυτοτελή κλάδο των καθαρών Μαθηματικών, που έχει δικά του προβλήματα και δικές του μεθόδους.

---

### 3.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

---

#### *Πείραμα Τύχης*

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, αν θερμάνουμε αποσταγμένο νερό σε  $100^{\circ}$  Κελσίου στην επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, το νερό θα βράσει. Επίσης, αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει στο κενό υπό την επίδραση της βαρύτητας, μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το διάστημα που θα διανύσει σε ορισμένο χρόνο  $t$ . Κάθε τέτοιο πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** (deterministic) πείραμα.

Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης** (random experiment). Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα σημείο μιας εθνικής οδού, αφού ο αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.

Πειράματα τύχης είναι και τα εξής:

1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.
2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.

3. Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους.
4. Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε “γράμματα” αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.
5. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.
6. Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.
7. Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετρίεται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.
8. Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετρίεται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.
9. Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

## Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα  $\Omega$ . Αν δηλαδή  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}.$$

Έτσι, στο πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης, αν με  $K$  συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε “κεφαλή” και με  $\Gamma$  το αποτέλεσμα να φέρουμε “γράμματα”, τότε ο δειγματικός χώρος είναι  $\Omega = \{K, \Gamma\}$ . Επίσης, στο δεύτερο από τα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

## Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$  και  $\Gamma = \{6\}$  είναι ενδεχόμενα. Το  $A$  είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το  $B$  να φέρουμε περιττό αριθμό και το  $\Gamma$  να φέρουμε 6. Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του

δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, το  $\Gamma$  είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα  $A$  και  $B$  είναι σύνθετα ενδεχόμενα. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι' αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο  $A = \{2, 4, 6\}$  έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

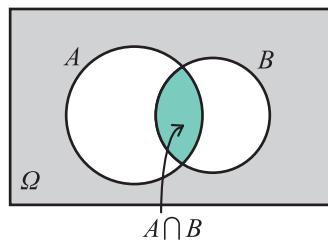
Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο  $\Omega$ . Γι' αυτό το  $\Omega$  λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο  $\emptyset$  που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το  $\emptyset$  είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου  $A$  θα το συμβολίζουμε με  $N(A)$ . Επομένως, αν  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  και  $A = \{2, 4, 6\}$  έχουμε  $N(A) = 3$ ,  $N(\Omega) = 6$  και  $N(\emptyset) = 0$ .

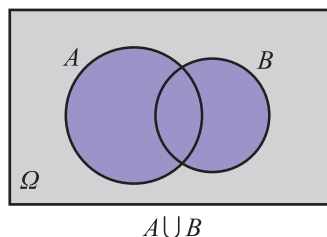
## Πράξεις με Ενδεχόμενα

Όπως είδαμε, τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Επομένως, μεταξύ των ενδεχομένων ενός πειράματος μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα. Έτσι, αν  $A$  και  $B$  είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

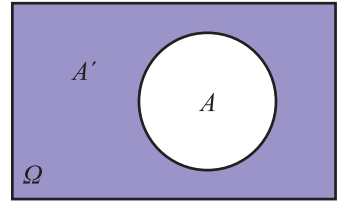
- Το ενδεχόμενο  $A \cap B$ , που διαβάζεται “ $A$  τομή  $B$ ” ή “ $A$  και  $B$ ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα  $A$  και  $B$ .



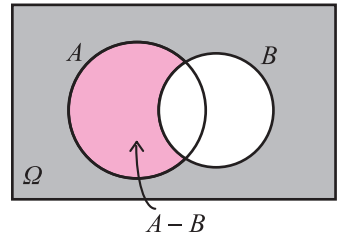
- Το ενδεχόμενο  $A \cup B$ , που διαβάζεται “ $A$  ένωση  $B$ ” ή “ $A$  ή  $B$ ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα  $A, B$ .



- Το ενδεχόμενο  $A'$ , που διαβάζεται “όχι  $A$ ” ή “συμπληρωματικό του  $A$ ” και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το  $A$ . Το  $A'$  λέγεται και “αντίθετο του  $A$ ”.



- Το ενδεχόμενο  $A - B$ , που διαβάζεται “διαφορά του  $B$  από το  $A$ ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το  $A$  αλλά όχι το  $B$ . Είναι εύκολο να δούμε ότι  $A - B = A \cap B'$ .



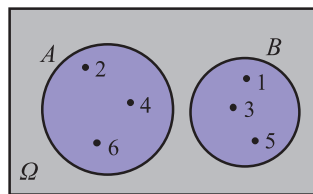
Στον παρακάτω πίνακα τα  $A$  και  $B$  συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το  $\omega$  ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα  $A$  και  $B$  διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

|                                                                 |                                                |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Το ενδεχόμενο $A$ πραγματοποιείται                              | $\omega \in A$                                 |
| Το ενδεχόμενο $A$ δεν πραγματοποιείται                          | $\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$ )         |
| Ένα τουλάχιστον από τα $A$ και $B$ πραγματοποιείται             | $\omega \in A \cup B$                          |
| Πραγματοποιούνται αμφότερα τα $A$ και $B$                       | $\omega \in A \cap B$                          |
| Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα $A$ και $B$                  | $\omega \in (A \cup B)'$                       |
| Πραγματοποιείται μόνο το $A$                                    | $\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$ ) |
| Η πραγματοποίηση του $A$ συνεπάγεται την πραγματοποίηση του $B$ | $A \subseteq B$                                |

Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού έστω τα ενδεχόμενα  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  και  $B = \{2, 4, 6\}$ . Αν το αποτέλεσμα της ρίξης είναι ο αριθμός 1, τότε τα ενδεχόμενα  $A$ ,  $A \cup B$ ,  $A - B$ ,  $B'$  πραγματοποιούνται, ενώ τα  $A'$ ,  $B$ ,  $(A \cup B)'$ ,  $(A - B)'$ ,  $A \cap B$  δεν πραγματοποιούνται.

## Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Στη ρίψη ενός ζαριού αν  $A$  είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό και  $B$  το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό, έχουμε  $A = \{2, 4, 6\}$  και  $B = \{1, 3, 5\}$ . Παρατηρούμε ότι τα  $A$  και  $B$  δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή τα  $A$  και  $B$  λέγονται ασυμβίβαστα. Γενικά:



$$A \cap B = \emptyset$$

**Δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  λέγονται ασυμβίβαστα, όταν  $A \cap B = \emptyset$ .**

Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### 1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.

i) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  του πειράματος.

ii) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

$A_1$ : “Ο αριθμός των  $K$  υπερβαίνει τον αριθμό των  $\Gamma$ ”

$A_2$ : “Ο αριθμός των  $K$  είναι ακριβώς 2”

$A_3$ : “Ο αριθμός των  $K$  είναι τουλάχιστον 2”

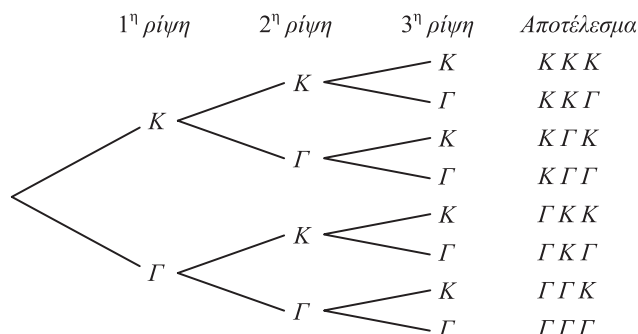
$A_4$ : “Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις”

$A_5$ : “Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε  $K$ ”

iii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα  $A_3'$ ,  $A_5 \cap A_2$ ,  $A_5 \cup A_4$ .

## ΛΥΣΗ

i) Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:



Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το  $K$  και το  $\Gamma$  και είναι

$$\Omega = \{KKK, KKG, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

ii) Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο  $\Omega$  και την αντίστοιχη ιδιότητα έχουμε:

$$A_1 = \{KKK, KKG, K\Gamma K, \Gamma KK\}$$

$$A_2 = \{KKG, K\Gamma K, \Gamma KK\}$$

$$A_3 = \{KKK, KKG, K\Gamma K, \Gamma KK\} \text{ (Παρατηρούμε ότι } A_3 = A_1)$$

$$A_4 = \{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma\}$$

$$A_5 = \{KKK, K\Gamma\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma\}.$$

iii) Το  $A_3'$  περιέχει εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχει το  $A_3$ , περιέχει δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ο αριθμός των  $K$  είναι μικρότερος από 2. Επομένως,  $A_3' = \{K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$ .

Το ενδεχόμενο  $A_5 \cap A_2$  περιέχει τα κοινά στοιχεία των  $A_5$  και  $A_2$ , δηλαδή τα στοιχεία με δύο ακριβώς  $K$ , εκ των οποίων το ένα στην πρώτη θέση. Επομένως,  $A_5 \cap A_2 = \{KKG, K\Gamma K\}$ .

Το ενδεχόμενο  $A_5 \cup A_4$  περιέχει τα στοιχεία που στην πρώτη θέση έχουν  $K$  ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις.

Επομένως,  $A_5 \cup A_4 = \{KKG, K\Gamma K, KKG, KKK, \Gamma\Gamma\Gamma\}$ .

**2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός πειράματος με δειγματικό χώρο  $\Omega$ . Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:**

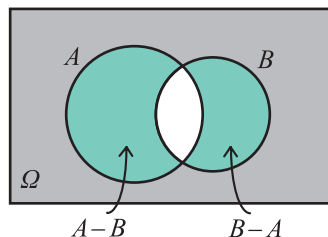
i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα  $A$  και  $B$ .

ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα  $A$  και  $B$ .

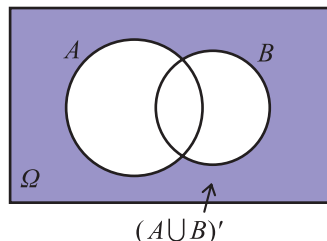
### ΛΥΣΗ

i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το  $A$  ή μόνο το  $B$ , γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των  $A$  και  $B$  με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο από τα  $A - B$  και  $B - A$ . Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το  $(A - B) \cup (B - A)$  ή ισοδύναμα το  $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ .



ii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένας από τα  $A$  και  $B$ , γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του  $\Omega$  που είναι εκτός της ένωσης των  $A$  και  $B$ . Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του  $A \cup B$ , δηλαδή το  $(A \cup B)'$ .



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).
  - i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
  - ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη”;
  - iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα”;
2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση).
3. Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:
  - i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο  $\Omega$  του πειράματος
  - ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο  $A$ : “Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της”.
4. Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Γεύμα       | Επιλογές                 |
|-------------|--------------------------|
| Κύριο πιάτο | Κοτόπουλο ή φιλέτο       |
| Συνοδευτικό | Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα |
| Γλυκό       | Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ   |

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο.

- i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος
- ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο  $A$ : “το άτομο επιλέγει παγωτό”
- iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο  $B$ : “το άτομο επιλέγει κοτόπουλο”
- iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο  $A \cap B$
- v) Αν  $\Gamma$  το ενδεχόμενο: “το άτομο επιλέγει ρύζι”, να βρείτε το ενδεχόμενο  $(A \cap B) \cap \Gamma$ .

5. Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο ασθενή και με 1 τον ασφαλισμένο, και στη συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα  $\alpha, \beta, \gamma$  ή  $\delta$ , ανάλογα με το αν η κατάσταση του είναι καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς. Να βρείτε:
  - i) Το δειγματικό χώρο  $\Omega$  του πειράματος.
  - ii) Το ενδεχόμενο  $A$ : “η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος”.
  - iii) Το ενδεχόμενο  $B$ : “η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια”.
  - iv) Το ενδεχόμενο  $\Gamma$ : “ο ασθενής είναι ασφαλισμένος”.
6. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ασυμβίβαστα:
  - i) Ρίχνουμε ένα ζάρι.  $A$  είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και  $B$  είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.
  - ii) Επιλέγουμε ένα άτομο.  $A$  είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και  $B$  το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.
  - iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα.  $A$  είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και  $B$  το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.
  - iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο.  $A$  είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και  $B$  το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.
7. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν  $\alpha$  είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και  $\beta$  είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:  
 Α: “Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης”.  
 Β: “Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός”.  
 Γ: “Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5”.  
 Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα  $A \cap B$ ,  $A \cap \Gamma$ ,  $B \cap \Gamma$ ,  $(A \cap B) \cap \Gamma$ .
3. Αν  $A$  και  $B$  είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , να αποδείξετε ότι:  $A \subseteq B$ , τότε  $B' \subseteq A'$ .
4. Έστω  $A$  και  $B$  δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Να γράψετε το ενδεχόμενο  $A \cup B$  ως ένωση τριών ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων.

## 3.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

### Εισαγωγή

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης, όπως είδαμε, είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν  $A$  είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το  $A$  θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι' αυτό είναι χρήσιμο να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ενδεχόμενο  $A$  έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της “προσδοκίας” με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του  $A$  και τον συμβολίζουμε με  $P(A)$ . Πώς όμως θα προσδιορίσουμε για κάθε ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης την πιθανότητά του; Δηλαδή πώς θα βρούμε μια διαδικασία με την οποία σε κάθε ενδεχόμενο θα αντιστοιχίζουμε την πιθανότητά του; Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά.

## Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας

Αν σε  $\nu$  εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο  $A$  πραγματοποιείται  $\kappa$  φορές, τότε ο λόγος  $\frac{\kappa}{\nu}$  ονομάζεται *σχετική συχνότητα* του  $A$  και συμβολίζεται με  $f_A$ . Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$  και σε  $\nu$  εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα  $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_\lambda\}$  πραγματοποιούνται  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\lambda$  φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες  $f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}, f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu}, \dots, f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{\nu}$  των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

- $0 \leq f_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, \lambda$  (αφού  $0 \leq \kappa_i \leq \nu$ )
- $f_1 + f_2 + \dots + f_\lambda = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_\lambda}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$

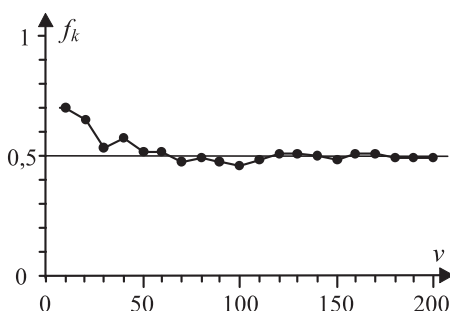
Ας εκτελέσουμε τώρα το ακόλουθο πείραμα: Ρίχνουμε ένα συμμετρικό και ομογενές νόμισμα και σημειώνουμε με  $K$  το αποτέλεσμα “κεφαλή” και με  $\Gamma$  το αποτέλεσμα “γράμματα”.

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται το πλήθος των  $K$  και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες στις 10, 20, 30, ..., 200 ρίψεις του νομίσματος ενώ στο σχήμα 1 παριστάνεται το αντίστοιχο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

| Πίνακας<br>ρίψεων ενός νομίσματος |          |            |
|-----------------------------------|----------|------------|
| $\nu$                             | $\kappa$ | $f_\kappa$ |
| 10                                | 7        | 0,700      |
| 20                                | 13       | 0,650      |
| 30                                | 16       | 0,533      |
| 40                                | 23       | 0,575      |
| 50                                | 26       | 0,520      |
| 60                                | 31       | 0,517      |
| 70                                | 33       | 0,471      |
| 80                                | 39       | 0,488      |
| 90                                | 43       | 0,478      |
| 100                               | 46       | 0,460      |
| 110                               | 53       | 0,482      |
| 120                               | 61       | 0,508      |
| 130                               | 66       | 0,508      |
| 140                               | 70       | 0,500      |
| 150                               | 73       | 0,486      |
| 160                               | 81       | 0,506      |
| 170                               | 87       | 0,512      |
| 180                               | 89       | 0,494      |
| 190                               | 93       | 0,489      |
| 200                               | 99       | 0,495      |

Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων

1



Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός  $\nu$  των ρίψεων η σχετική συχνότητα  $f_\kappa$  εμφάνισης της “κεφαλής” σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή, όπως λέμε “τείνει” στον αριθμό 0,5. Αυτό επιβεβαιώνει την “προσδοκία” μας ότι στη ρίψη ενός συμμετρικού και ομογενούς νομίσματος ή, όπως λέμε, ενός “αμερόληπτου” νομίσματος, οι σχετικές

συχνότητες των ενδεχομένων  $\{K\}$ ,  $\{Γ\}$  είναι ίσες. Ανάλογα παραδείγματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα** ή **νόμος των μεγάλων αριθμών**. Θα προσπαθήσουμε τώρα στηριζόμενοι στις προηγούμενες διαπιστώσεις να ορίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

### *Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας*

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση του αμερόληπτου νομίσματος. Ρίχνουμε ένα τέτοιο νόμισμα και παρατηρούμε την όψη που θα εμφανιστεί. Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα  $\{K\}$ ,  $\{Γ\}$  τείνει στον αριθμό  $\frac{1}{2}$ . Ομοίως θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε ότι στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{5\}$  και  $\{6\}$  τείνει στον αριθμό  $\frac{1}{6}$ . Σε πειράματα όπως τα προηγούμενα λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ή, ισοδύναμα, τα απλά ενδεχόμενα είναι **ισοπίθανα**.

Ας δούμε τώρα ποια αναμένουμε να είναι η σχετική συχνότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου σε ένα πείραμα με ισοπίθانا αποτελέσματα.

Έστω για παράδειγμα, το ενδεχόμενο να φέρουμε ζυγό αριθμό στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Επειδή το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι 2 ή 4 ή 6 και καθένα από τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζεται με σχετική συχνότητα  $\frac{1}{6}$ , η συχνότητα εμφάνισης του ζυγού αριθμού αναμένεται να είναι  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ .

Γενικά, σε ένα πείραμα με  $n$  ισοπίθانا αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με  $k$  στοιχεία θα τείνει στον αριθμό  $\frac{k}{n}$ . Γι' αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθانا αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$  τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Έτσι, έχουμε τον **κλασικό** ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

$$1. P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$$

$$2. P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$$

3. Για κάθε ενδεχόμενο  $A$  ισχύει  $0 \leq P(A) \leq 1$ , αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

### **Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας**

Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, είναι απαραίτητο τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα. Υπάρχουν όμως πολλά πειράματα τύχης, των οποίων ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Όπως για παράδειγμα ο αριθμός των αυτοκινητιστικών δυστυχημάτων μια ορισμένη εβδομάδα, η ρίψη ενός ζαριού που δεν είναι συμμετρικό κτλ. Για τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει ανάλογες ιδιότητες με τη σχετική συχνότητα.

Έστω  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο  $\{\omega_i\}$  αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με  $P(\omega_i)$ , έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1.$

Τον αριθμό  $P(\omega_i)$  ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου  $\{\omega_i\}$ . Ως πιθανότητα  $P(A)$  ενός ενδεχομένου  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$  ορίζουμε το άθροισμα  $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$ , ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου  $\emptyset$  ορίζουμε τον αριθμό  $P(\emptyset) = 0$ .

Αν  $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Στην πράξη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που δεν ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου  $A$  λαμβάνεται το όριο της σχετικής του συχνότητας.

## ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  και χρησιμοποιούμε τη φράση “παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του  $\Omega$ ”, εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα  $P(\omega_i) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$ .

## Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως “κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων”. Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

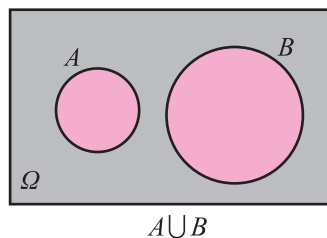
## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν  $N(A) = \kappa$  και  $N(B) = \lambda$ , τότε το  $A \cup B$  έχει  $\kappa + \lambda$  στοιχεία, γιατί αλλιώς τα  $A$  και  $B$  δε θα ήταν ασυμβίβαστα.

Δηλαδή, έχουμε  $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$ .

Επομένως:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} \\ &= P(A) + P(B). \end{aligned}$$



Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα  $A, B$  και  $\Gamma$  είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε  $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$ .

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

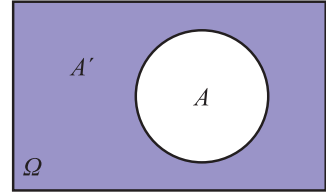
Επειδή  $A \cap A' = \emptyset$ , δηλαδή τα  $A$  και  $A'$  είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A')$$

Οπότε  $P(A') = 1 - P(A)$ .



3. Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Για δυο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα  $N(A) + N(B)$  το πλήθος των στοιχείων του  $A \cap B$  υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με  $N(\Omega)$  έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

4. Αν  $A \subseteq B$ , τότε  $P(A) \leq P(B)$

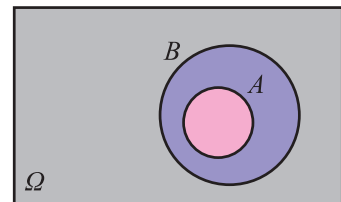
**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Επειδή  $A \subseteq B$  έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \leq P(B).$$



5. Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

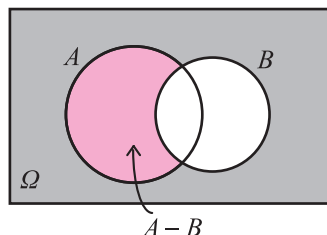
### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα  $A - B$  και  $A \cap B$  είναι ασυμβίβαστα και  $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ , έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Άρα

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$



## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Ρίχνουμε δύο “αμερόληπτα” ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

### ΛΥΣΗ

• Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος, χρησιμοποιούμε έναν πίνακα “διπλής εισόδου”, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

| $\begin{smallmatrix} 2o \\ 1o \end{smallmatrix}$ | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
|--------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1                                                | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2                                                | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3                                                | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4                                                | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5                                                | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6                                                | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

Από τον πίνακα αυτόν έχουμε ότι ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  έχει 36 ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή  $N(\Omega) = 36$ .

• Το ενδεχόμενο  $A$ : “να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς”, είναι το

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$$

δηλαδή  $N(A) = 10$

• Επομένως,  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ .

Άρα, η πιθανότητα να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς είναι  $\frac{5}{18} \approx 0,28$  ή, στη γλώσσα των ποσοστών, περίπου 28%.

**2.** Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  δίνονται  $P(A)=0,5$ ,  $P(B)=0,4$  και  $P(A \cap B)=0,2$ . Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

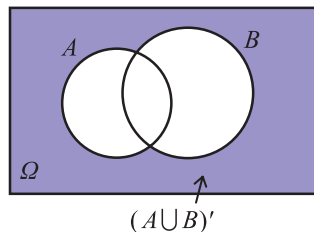
i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα  $A$  και  $B$ .

ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα  $A$  και  $B$ .

### ΛΥΣΗ

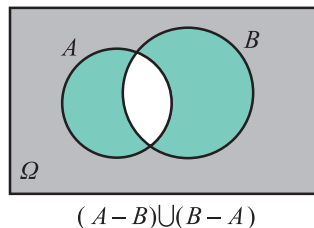
i) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα  $A$  και  $B$  είναι το  $(A \cup B)'$ . Επομένως

$$\begin{aligned} P((A \cup B)') &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - (0,5 + 0,4 - 0,2) \\ &= 1 - 0,7 \\ &= 0,3. \end{aligned}$$



ii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα  $A$  και  $B$  είναι το  $(A - B) \cup (B - A)$ . Επειδή τα ενδεχόμενα  $A - B$  και  $B - A$  είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

$$\begin{aligned} P((A - B) \cup (B - A)) &= \\ &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= 0,5 + 0,4 - 2 \cdot 0,2 \\ &= 0,5. \end{aligned}$$



**3.** Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν  $P(A)=0,6$  και  $P(B)=0,5$ .

i) Να εξεταστεί αν τα  $A$  και  $B$  είναι ασυμβίβαστα.

ii) Να αποδείξετε ότι  $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$ .

**ΛΥΣΗ**

i) Αν τα  $A$  και  $B$  ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα είχαμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,6 + 0,5 = 1,1$$

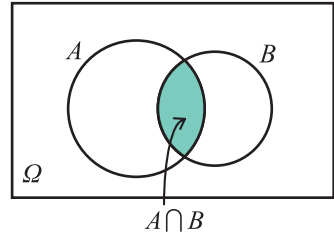
ισχύει, δηλαδή,  $P(A \cup B) > 1$ , που είναι άτοπο. Άρα, τα  $A$  και  $B$  δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή  $A \cap B \subseteq B$  και  $A \cap B \subseteq A$ , έχουμε

$$P(A \cap B) \leq P(B) \text{ και } P(A \cap B) \leq P(A),$$

$$\text{επομένως } P(A \cap B) \leq 0,5 \quad (1)$$

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - P(A \cap B).$$

$$\text{Όμως } P(A \cup B) \leq 1.$$

$$\text{Επομένως: } 0,6 + 0,5 - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0,6 + 0,5 - 1 \leq P(A \cap B)$$

$$0,1 \leq P(A \cap B). \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5.$$

---

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**


---

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων i) το χαρτί να είναι πέντε ii) το χαρτί να μην είναι πέντε.
2. Να βρείτε την πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο “γράμματα”.

3. Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:

i) μαύρη ii) άσπρη ή μαύρη iii) ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

4. Σε μια τάξη με 30 μαθητές, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέρφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

|                 |   |    |   |   |   |   |
|-----------------|---|----|---|---|---|---|
| Αριθμός μαθητών | 4 | 11 | 9 | 3 | 2 | 1 |
| Αριθμός αδελφών | 0 | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 |

Αν επιλέξουμε τυχαία από την τάξη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά.

5. Έστω τα σύνολα  $\Omega = \{\omega \in N \mid 10 \leq \omega \leq 20\}$ ,  
 $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$  και  
 $B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 4\}$ . Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα στοιχείο του  $\Omega$ , να βρείτε τις πιθανότητες i) να ανήκει στο  $A$  ii) να μην ανήκει στο  $B$ .
6. Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα i) να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος ii) να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.
7. Για τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν  $P(A) = \frac{17}{30}$ ,  $P(B) = \frac{7}{15}$  και  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ . Να βρείτε την  $P(A \cap B)$ .
8. Για τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ . Να βρείτε την  $P(B)$ .
9. Για τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι  $P(A) = P(B)$ ,  $P(A \cup B) = 0,6$  και  $P(A \cap B) = 0,2$ . Να βρείτε την  $P(A)$ .
10. Για τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  δίνεται ότι  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B') = \frac{2}{3}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ . Να βρείτε την  $P(A \cup B)$ .
11. Για δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  να δείξετε ότι  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ .

12. Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;
13. Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει  
α) τουλάχιστον μία ασθένεια;     β) μόνο μία ασθένεια;
14. Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  έχουμε  $P(A) = \kappa$ ,  $P(B) = \lambda$  και  $P(A \cap B) = \mu$ , να βρείτε τις πιθανότητες:  
i) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα  $A$  και  $B$   
ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα  $A$  και  $B$   
iii) να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα  $A$  και  $B$ .
2. Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.
3. Αν  $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$ , να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(A')$ .
4. Αν  $0 < P(A) < 1$ , να αποδείξετε ότι  $\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4$ .
5. Αν  $A$  και  $B$  είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $P(A) = 0,6$  και  $P(B) = 0,7$ , να δείξετε ότι  $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$ .
6. Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  να δείξετε ότι  $P(B) - P(A') \leq P(A \cap B)$ .

### 3.3 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Είδαμε ότι όταν ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  ενός πειράματος τύχης έχει πεπερασμένο πλήθος απλών ενδεχομένων και τα απλά αυτά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου  $A$  είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Επομένως, όταν έχουμε ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, ο υπολογισμός της  $P(A)$  ανάγεται στην απαρίθμηση των στοιχείων των συνόλων  $\Omega$  και  $A$ .

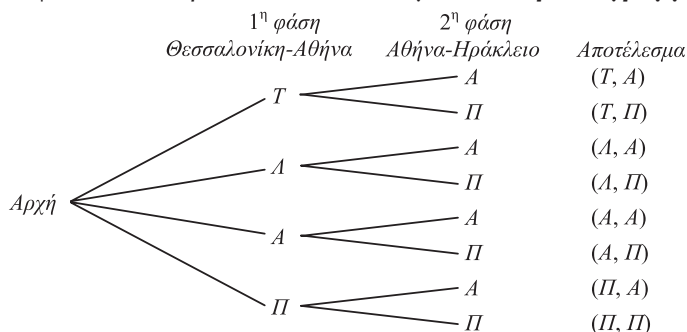
Σε πολλά προβλήματα όμως, η απευθείας απαρίθμηση των στοιχείων του δειγματικού χώρου και των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν είναι δύσκολη ή και πρακτικά αδύνατη. Στις περιπτώσεις αυτές η απαρίθμηση διευκολύνεται με τις επόμενες μεθόδους της Συνδυαστικής η οποία είναι ένας από τους βασικούς κλάδους των Μαθηματικών.

#### Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος επιθυμεί να ταξιδέψει από τη Θεσσαλονίκη, μέσω Αθηνών, στο Ηράκλειο Κρήτης χωρίς να χρησιμοποιήσει το ΙΧ αυτοκίνητό του. Από τη Θεσσαλονίκη μπορεί να ταξιδέψει στην Αθήνα με τρένο ( $T$ ) ή λεωφορείο ( $A$ ) ή αεροπλάνο ( $A$ ) ή πλοίο ( $\Pi$ ) και από την Αθήνα στο Ηράκλειο με πλοίο ή αεροπλάνο. Ενδιαφερόμαστε για τους διαφορετικούς τρόπους ως προς το ταξιδιωτικό μέσο με τους οποίους μπορεί να πάει κάποιος από τη Θεσσαλονίκη στο Ηράκλειο.

Το ταξίδι λοιπόν γίνεται σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η μετάβαση από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα και η δεύτερη από την Αθήνα στο Ηράκλειο. Η πρώτη φάση του ταξιδιού μπορεί να γίνει με 4 τρόπους και η δεύτερη με 2 τρόπους. Σε κάθε τρόπο της πρώτης φάσης αντιστοιχούν οι δύο τρόποι της δεύτερης φάσης. Άρα το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο μπορεί να γίνει με  $4 \cdot 2 = 8$  διαφορετικούς τρόπους.

Τα παραπάνω φαίνονται παραστατικά στο επόμενο **δεντροδιάγραμμα**:



Γενικά ισχύει η επόμενη **βασική αρχή απαρίθμησης**:

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε  $n$  διαδοχικές φάσεις  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Αν η φάση  $\varphi_1$  μπορεί να πραγματοποιηθεί με  $k_1$  τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση  $\varphi_2$  μπορεί να πραγματοποιηθεί με  $k_2$  τρόπους, ..., και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση  $\varphi_n$  μπορεί να πραγματοποιηθεί με  $k_n$  τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  τρόπους.

Επομένως, αν με μια διαδικασία η οποία πραγματοποιείται όπως ορίστηκε προηγουμένως, στην πρώτη φάση συμπληρώνεται το πρώτο στοιχείο μιας διατεταγμένης  $n$ -άδας με  $k_1$  τρόπους, στη δεύτερη φάση το δεύτερο στοιχείο με  $k_2$  τρόπους, ..., στη  $n$ -οστή φάση το  $n$ -στό στοιχείο με  $k_n$ , τότε σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης μπορούν να σχηματισθούν  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  διαφορετικές διατεταγμένες  $n$ -άδες.

## Διατάξεις

Ας υποθέσουμε ότι μία επιτροπή με 5 μαθητές συνεδριάζει για να εκλέξει πρόεδρο, γραμματέα, και ταμία. Αν θέλουμε να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών τριάδων που θα εκλεγούν για τις τρεις θέσεις σκεπτόμαστε ως εξής:

Η διαδικασία εκλογής μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις: 1η φάση εκλογή προέδρου, 2η φάση εκλογή γραμματέα και 3η φάση εκλογή ταμία. Η 1η φάση μπορεί να γίνει με 5 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής. Η 2η φάση μπορεί να γίνει με 4 τρό-

| 1 <sup>η</sup><br>θέση | 2 <sup>η</sup><br>θέση | 3 <sup>η</sup><br>θέση |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| 5                      | 4                      | 3                      |
| τρόποι                 | τρόποι                 | τρόποι                 |

πους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα από την εκλογή του προέδρου. Η 3η φάση μπορεί να γίνει με 3 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα και από την εκλογή του ταμία. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των διαφορετικών δυνατών τριάδων είναι  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ .

Καθεμιά από τις παραπάνω τριάδες λέγεται **διάταξη** των 5 ανά 3.

Γενικά:

**Διάταξη των  $n$  στοιχείων ενός συνόλου  $A$  ανά  $k$ , με  $k \leq n$ , λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε  $k$  διαφορετικά στοιχεία του  $A$  και να τα βάλουμε σε μια σειρά.**

Το πλήθος των διατάξεων των  $n$  ανά  $k$  συμβολίζεται με  $\Delta'_k$  και αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι:

$$\Delta_{\kappa}^{\nu} = \nu(\nu-1)(\nu-2)\dots(\nu-\kappa+1) \quad (1)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο διατάξεις των  $\nu$  ανά  $\kappa$  είναι διαφορετικές αν διαφέρουν ως προς ένα τουλάχιστον στοιχείο ή ως προς τη θέση που κατέχουν τα στοιχεία. Για παράδειγμα, οι διατάξεις (1, 2, 3), (1, 4, 3) και (3, 2, 1) είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που πάρουμε και τα  $\nu$  στοιχεία ενός συνόλου  $A$  και τα βάλουμε σε μια σειρά, τότε έχουμε μια διάταξη των  $\nu$  στοιχείων ανά  $\nu$  η οποία λέγεται **μετάθεση** των  $\nu$  στοιχείων. Το πλήθος  $\Delta_{\nu}^{\nu}$  των μεταθέσεων των  $\nu$  στοιχείων συμβολίζεται με  $M_{\nu}$  και σύμφωνα με τον τύπο (1) είναι

$$M_{\nu} = \nu(\nu-1)(\nu-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Το γινόμενο  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\nu-2)(\nu-1)\nu$  συμβολίζεται με  $\nu!$  και διαβάζεται  **$\nu$  παραγοντικό**. Επομένως

$$M_{\nu} = \nu! \quad (2)$$

Έτσι, αν στο προηγούμενο παράδειγμα θέλουμε να βάλουμε τους 5 μαθητές σε μια σειρά, τότε υπάρχουν  $M_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$  διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τους τοποθετήσουμε

Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο του παραγοντικού για να εκφράσουμε το πλήθος των διατάξεων των  $\nu$  ανά  $\kappa$  με  $\kappa < \nu$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta_{\kappa}^{\nu} &= \nu(\nu-1)(\nu-2)\dots(\nu-\kappa+1) \\ &= \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\dots(\nu-\kappa+1)(\nu-\kappa)(\nu-\kappa-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(\nu-\kappa)(\nu-\kappa-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\Delta_{\kappa}^{\nu} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} \quad (3)$$

Αν τώρα θέλουμε ο τύπος (3) να ισχύει και για  $\kappa = \nu$ , επειδή  $\Delta_{\nu}^{\nu} = M_{\nu} = \nu!$ , πρέπει  $\frac{\nu!}{0!} = \nu!$ . Είναι λοιπόν λογικό να ορίσουμε  **$0! = 1$** .

## Συνδυασμοί

Ας υποθέσουμε ότι από 5 άτομα  $A, B, \Gamma, \Delta$  και  $E$  θέλουμε να επιλέξουμε μια ομάδα 3 ατόμων, χωρίς να μας ενδιαφέρει η κατάταξη μέσα σ' αυτήν την ομάδα. Αν  $x$  είναι ο αριθμός των διαφορετικών ομάδων που μπορούμε να επιλέξουμε, τότε από κάθε τέτοια ομάδα μπορούν να προκύψουν  $3!$  διατεταγμένες ομάδες. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των διατεταγμένων ομάδων θα είναι  $3!x$ . Ο αριθμός αυτός όμως είναι το πλήθος των διατάξεων  $\Delta_3^5$ . Επομένως, θα είναι  $\Delta_3^5 = 3!x$ ,

$$\text{οπότε } x = \frac{\Delta_3^5}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

Πιο συγκεκριμένα οι ομάδες αυτές θα είναι:

$\{A, B, \Gamma\}, \{A, B, \Delta\}, \{A, B, E\}, \{A, \Gamma, \Delta\}, \{A, \Gamma, E\}, \{A, \Delta, E\}, \{B, \Gamma, \Delta\}, \{B, \Gamma, E\}, \{B, \Delta, E\}$  και  $\{\Gamma, \Delta, E\}$ . Κάθε τέτοια επιλογή λέγεται **συνδυασμός** των 5 ανά 3.

Γενικά:

**Συνδυασμός των  $v$  στοιχείων ενός συνόλου  $A$  ανά  $k$  λέγεται κάθε υποσύνολο του  $A$  με  $k$  στοιχεία.**

Το πλήθος των συνδυασμών των  $v$  στοιχείων ανά  $k$  συμβολίζεται με  $\binom{v}{k}$  και αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι

$$\binom{v}{k} = \frac{\Delta_k^v}{k!} = \frac{v!}{k!(v-k)!} = \frac{v!}{k!(v-k)!}.$$

Επομένως,

$$\binom{v}{k} = \frac{v!}{k!(v-k)!}.$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο συνδυασμοί των  $v$  ανά  $k$  είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστον στοιχείο.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Στο τυχερό παιχνίδι του ΠΡΟΠΟ συμπληρώνουμε καθεμιά από τις 13 θέσεις με ένα από τα στοιχεία 1, 2, X που αντιστοιχούν σε πρόβλεψη: νίκης της γηπεδούχου ομάδας (1), νίκης της φιλοξενούμενης ομάδας (2), ισοπαλίας (X).

- i) Να προσδιοριστεί το πλήθος των διαφορετικών στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε.
- ii) Αν συμπληρώσουμε τυχαία μια στήλη ΠΡΟΠΟ, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων  $A$ : “να πιάσουμε ακριβώς 12 αγώνες”.  
 $B$ : “να πιάσουμε ακριβώς 11 αγώνες”.

### ΛΥΣΗ

i) Μια στήλη ΠΡΟΠΟ είναι μια 13-άδα, στην οποία κάθε θέση μπορεί να συμπληρωθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά  $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3}_{13 \text{ παράγοντες}} = 3^{13} = 1.594.323$  διαφορετικές στήλες.

ii) • Ευνοϊκή περίπτωση για το  $A$  είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 12 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και η εναπομένουσα θέση συμπληρώνεται με λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν  $\binom{13}{12}$  τρόποι για να επιλέξουμε τους 12 αγώνες που συμπληρώνονται με το σωστό αποτέλεσμα, και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε τον αγώνα που απομένει με λάθος πρόβλεψη.

Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το  $A$  είναι  $N(A) = \binom{13}{12} \cdot 2$ . Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{13}{12} \cdot 2}{3^{13}} = \frac{13 \cdot 2}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}} \approx 0,000016.$$

• Ευνοϊκή περίπτωση για το  $B$  είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 11 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις συμπληρώνεται με μια λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν  $\binom{13}{11}$  τρόποι για να επιλέξουμε τις 11 θέσεις με το σωστό αποτέλεσμα και 2 τρόποι για να συμπλη-

ρώσουμε καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις με λαθεμένη πρόβλεψη. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το  $B$  είναι  $N(B) = \binom{13}{11} \cdot 2 \cdot 2$ . Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{13}{11} \cdot 2 \cdot 2}{3^{13}} = \frac{312}{3^{13}} \approx 0,000196.$$

**2. Στο τυχερό παιχνίδι του ΛΟΤΤΟ “6 από 49”, αν παίξουμε μια στήλη, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$ : “να πετύχουμε 4 ακριβώς σωστά νούμερα”;**

### ΛΥΣΗ

Επειδή τελικά δεν έχει σημασία η σειρά κλήρωσης του κάθε αριθμού, οι δυνατές περιπτώσεις του πειράματος είναι τόσες όσοι και οι συνδυασμοί των 49 ανά 6,

$$\text{δηλαδή } N(\Omega) = \binom{49}{6}.$$

Για να βρούμε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων σκεφτόμαστε ως εξής:

Υπάρχουν  $\binom{6}{4}$  τρόποι για να επιλέξουμε 4 σωστά νούμερα από τα 6 που κλη-

ρώθηκαν. Στη συνέχεια μένουν  $\binom{49-6}{6-4} = \binom{43}{2}$  τρόποι για να επιλέξουμε τα 2

λάθος νούμερα. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι

$$N(A) = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}. \text{ Άρα}$$

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13545}{13983816} \approx 0,000969 \text{ ή } 1\% \text{ περίπου.}$$

**3. Ποια είναι η πιθανότητα μεταξύ  $\kappa$  μαθητών ( $\kappa \leq 365$ ) δύο τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; (Ο χρόνος υπολογίζεται με 365 μέρες).**

### ΛΥΣΗ

Αν  $A$  είναι το ενδεχόμενο “δύο τουλάχιστον μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα”, τότε  $A'$  είναι το ενδεχόμενο “οι  $\kappa$  μαθητές να έχουν γενέθλια σε διαφο-

ρετικές μέρες” και ισχύει  $P(A) = 1 - P(A')$ . Επομένως ο υπολογισμός της  $P(A)$  ανάγεται στον υπολογισμό της  $P(A')$ . Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος είναι  $N(\Omega) = 365 \cdot 365 \cdot 365 \dots 365 = 365^k$ , αφού ένας μαθητής μπορεί να έχει γεννηθεί σε μια από τις 365 μέρες του έτους. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το  $A'$  είναι  $365 \cdot (365 - 1) \cdot (365 - 2) \dots [(365 - (k - 1))]$ , αφού οι  $k$  μαθητές πρέπει να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές μέρες του έτους.

Επομένως,

$$P(A') = \frac{365 \cdot (365 - 1) \cdot (365 - 2) \dots (365 - k + 1)}{365^k} = \frac{365 \cdot 364 \dots (365 - k + 1)}{365^k}.$$

Άρα 
$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \dots (365 - k + 1)}{365^k}.$$

Οι τιμές του  $P(A)$  για μερικές τιμές του  $k$  δίνονται στον επόμενο πίνακα:

| $k$    | 10    | 20    | 23    | 30    | 60    | 70    |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P(A)$ | 0,117 | 0,411 | 0,507 | 0,706 | 0,994 | 0,999 |

Παρατηρούμε ότι ήδη μεταξύ 23 ατόμων η πιθανότητα δύο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα είναι μεγαλύτερη από 50%, ενώ μεταξύ 70 ατόμων το ενδεχόμενο αυτό είναι σχεδόν βέβαιο.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν κάποιος διαθέτει 3 σακάκια, 4 παντελόνια, 5 πουκάμισα, 10 ζευγάρια κάλτσες και 2 ζευγάρια παπούτσια, με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη; Ποια είναι η πιθανότητα να φοράει ένα ορισμένο σακάκι;
2. Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να κατασκευάσουμε που να περιέχουν στη σειρά τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό; Ποια είναι η πιθανότητα μια τέτοια πινακίδα να αρχίζει με φωνήεν και να τελειώνει σε άρτιο ψηφίο;
3. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις μιας σειράς; Ποιά είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να μείνει κενή;

4. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;
5. Να αποδείξετε ότι 
$$\binom{v}{\kappa} = \binom{v}{v-\kappa}.$$
6. Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία  $A_1, A_2, \dots, A_8$ . Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά; Ποια είναι η πιθανότητα ένα από τα παραπάνω τμήματα που επιλέγεται τυχαία να μη διέρχεται από το σημείο  $A_1$ ;

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 φτιάχνουμε τετραψήφιους αριθμούς στους οποίους το κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερο από μια φορά. Αν πάρουμε τυχαία έναν τέτοιο αριθμό, ποια είναι η πιθανότητα να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά;
2. Από το σύνολο των μεταθέσεων των στοιχείων 1, 2, 3, ...,  $v$  επιλέγουμε τυχαίως μία. Να βρείτε ποια είναι η πιθανότητα να μην αρχίζει από 1.
3. Δέκα παιδιά, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον σε δέκα θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας και η Ελένη να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;
4. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα άτομα να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους.
5. Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαίως 4 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:  
i) τα άτομα να είναι γυναίκες      ii) ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας  
iii) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.
6. Ένα κουτί περιέχει 20 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 5 είναι ελαττωματικές. Επιλέγουμε τυχαίως 4 ασφάλειες και τις δοκιμάζουμε. Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου το κουτί να γίνει αποδεκτό.

7. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ . Στην  $\varepsilon_1$  ορίζουμε 10 σημεία και στην  $\varepsilon_2$  20 σημεία. Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά; Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα τέτοιο τρίγωνο, ποια είναι η πιθανότητα να έχει μία πλευρά του στην  $\varepsilon_1$ ;
8. Ρίχνουμε ένα νόμισμα  $n$  φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να μη φέρουμε σε δύο διαδοχικές ρίψεις ίδιο αποτέλεσμα.
9. Ο υπάλληλος ενός χώρου στάθμευσης δίνει τυχαία τα τρία κλειδιά αυτοκινήτων στους τρεις κατόχους των αυτοκινήτων αυτών. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:  
 $A$ : “Κάθε οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί”  
 $B$ : “Μόνο ένας οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί”  
 $\Gamma$ : “Κανένας οδηγός να μην πάρει το δικό του κλειδί”.
10. Από μια τάξη στην οποία φοιτούν 10 κορίτσια και 12 αγόρια επιλέγονται στην τύχη τρία άτομα για να εκπροσωπήσουν την τάξη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα επιλεγμένα άτομα να είναι του ίδιου φύλου.
11. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε τουλάχιστον ένα “έξι” σε 4 ρίψεις ενός ζαριού και να τη συγκρίνετε με την πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον μια φορά “εξάρες” σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.

### 3.4 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ - ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

#### Δεσμευμένη Πιθανότητα

Για το διοικητικό συμβούλιο μιας επιχείρησης θα εκλεγεί ένας αντιπρόσωπος. Υποψήφιοι είναι 7 άνδρες και 8 γυναίκες. Από τους υποψηφίους 3 άνδρες και 6 γυναίκες είναι διοικητικοί υπάλληλοι, ενώ 4 άνδρες και 2 γυναίκες είναι τεχνικοί υπάλληλοι. Σύμφωνα με αυτά τα δεδομένα οι υποψήφιοι μπορούν να ταξινομηθούν στον ακόλουθο πίνακα ως εξής:

|                 | Διοικητικός | Τεχνικός | Άθροισμα γραμμής |
|-----------------|-------------|----------|------------------|
| Άνδρας          | 3           | 4        | 7                |
| Γυναίκα         | 6           | 2        | 8                |
| Άθροισμα στήλης | 9           | 6        | 15               |

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A$ : “Να εκλεγεί διοικητικός”

$B$ : “Να εκλεγεί γυναίκα”.

Με την παραδοχή ότι τα 15 στοιχεία του δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα, έχουμε

$$P(A) = \frac{9}{15} \text{ και } P(B) = \frac{8}{15}.$$

Ύστερα από την εκλογή και πριν από την ανακοίνωση του αποτελέσματος έγινε γνωστό ότι εκλέγεται γυναίκα. Αυτό συνεπάγεται ότι ο αντιπρόσωπος θα είναι μία από τις 8 γυναίκες και επομένως η πιθανότητα να εκλεγεί διοικητικός γίνεται  $\frac{6}{8}$ . Αυτή λοιπόν είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου: “Να εκλεγεί διοικητικός με δεδομένο ότι έχει ήδη εκλεγεί γυναίκα”.

Το ενδεχόμενο αυτό συμβολίζεται με  $A|B$  και η πιθανότητα του  $P(A|B)$  λέγεται **δεσμευμένη πιθανότητα**

του  $A$  με δεδομένο το  $B$ , δηλαδή  $P(A|B) = \frac{6}{8} \neq P(A)$ . Ομοίως βρίσκουμε ότι

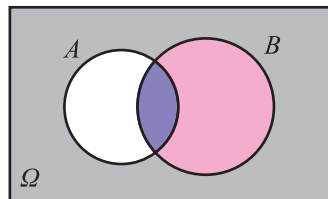
$$P(B|A) = \frac{6}{9} \neq P(B).$$

Γενικά, έστω  $A$  και  $B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $P(B) > 0$ . Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε την πιθανότητα του  $A$  με δεδομένο ότι το  $B$  έχει ήδη πραγματοποιηθεί.

Αφού έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο  $B$ , η απλή λογική μας λέει ότι πρέπει να περιοριστούμε στα στοιχεία του  $B$  και από αυτά να βρούμε ποια είναι τα ευνοϊκά για το  $A$ . Με άλλα λόγια η πληροφορία για την πραγματοποίηση του  $B$  περιορίζει το δειγματικό χώρο  $\Omega$  στο  $B$  και το ενδεχόμενο  $A$  στο  $A \cap B$ .

Επομένως, αν υποθέσουμε ότι ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  αποτελείται από ισοπίθανα αποτελέσματα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}}{\frac{N(B)}{N(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$



Η πιθανότητα αυτή λέγεται **δεσμευμένη πιθανότητα του  $A$  με δεδομένο το  $B$** .

Γενικά:

Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος και  $P(B) > 0$ , τότε ο λόγος  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  λέγεται δεσμευμένη πιθανότητα του  $A$  με δεδομένο το  $B$  και συμβολίζεται με  $P(A|B)$ . Δηλαδή:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ομοίως, αν  $P(A) > 0$ , τότε  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .

Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα η πιθανότητα να εκλεγεί διοικητικός με δεδομένο ότι έχει εκλεγεί γυναίκα είναι:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{6}{8} \quad \text{και} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{6}{9}.$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Οι παραπάνω ισότητες εκφράζουν τον **πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων**.

### *Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα*

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου  $A$ , με δεδομένο ότι το ενδεχόμενο  $B$  έχει ήδη πραγματοποιηθεί,

είναι  $P(A|B) = \frac{6}{8}$ , ενώ  $P(A) = \frac{9}{15}$ . Δηλαδή,  $P(A|B) \neq P(A)$ . Με άλλα λόγια

η πραγματοποίηση του  $B$  επηρέασε την πιθανότητα πραγματοποίησης του  $A$ .

Υπάρχουν όμως και ενδεχόμενα στα οποία η πληροφορία για την πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου. Για παράδειγμα, αν στο πείραμα της ρίψης δύο ζαριών θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

$A$ : “Το πρώτο ζάρι να φέρει 1” και  $B$ : “Το δεύτερο ζάρι να φέρει άρτιο”, έχουμε:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{36}.$$

Επομένως,  $P(A|B) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$  και  $P(B|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι  $P(A|B) = P(A)$  και  $P(B|A) = P(B)$ . Γι’ αυτό λέμε ότι τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι **ανεξάρτητα**. Γενικά:

Δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  με  $P(A) > 0$  και  $P(B) > 0$  λέγονται ανεξάρτητα, αν και μόνον αν  $P(A|B) = P(A)$  και  $P(B|A) = P(B)$ .

Λαμβάνοντας υπόψη τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων συμπεραίνουμε ότι για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα έχουμε  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . Η ισότητα αυτή χρησιμοποιείται και ως ορισμός των ανεξάρτερτων ενδεχομένων, χωρίς μάλιστα τον περιορισμό  $P(A) > 0$  και  $P(B) > 0$ . Δηλαδή:

Δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  λέγονται ανεξάρτητα, αν

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Δύο ενδεχόμενα που δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται **εξαρτημένα**.

## ΣΧΟΛΙΟ

Με την ισότητα  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  μπορούμε να διαπιστώσουμε αν δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ανεξάρτητα. Στην πράξη, όμως, η ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων ή ισχύει από μόνη της, λόγω της φύσης του πειράματος ή έχει περιληφθεί στις υποθέσεις κατασκευής του μοντέλου που περιγράφει κάποια φαινόμενα.

Για παράδειγμα, είναι εύλογο να δεχτούμε ότι είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα  $A$ : “ο συμπλέκτης του αυτοκινήτου είναι σε καλή κατάσταση” και  $B$ : “η μπαταρία του αυτοκινήτου είναι σε καλή κατάσταση”.

Αντιθέτως, είναι λάθος να δεχτούμε ως ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα

$A$ : “Ένα άτομο είναι μανιόδης καπνιστής” και  $B$ : “Ένα άτομο θα προσβληθεί από ασθένεια των πνευμόνων”.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Για την ασφαλή πτήση ενός αεροπλάνου με δύο κινητήρες, πρέπει να δουλεύει ο ένας τουλάχιστον κινητήρας. Οι κινητήρες δουλεύουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να πάθει κάποιος κινητήρας βλάβη είναι 0,003, να βρεθεί η πιθανότητα για μια ασφαλή πτήση.

### ΛΥΣΗ

Το αεροπλάνο δεν εκτελεί ασφαλή πτήση, όταν πάθουν βλάβη και οι δύο κινητήρες. Επειδή οι κινητήρες λειτουργούν ανεξαρτήτως ο ένας από τον άλλον, η πιθανότητα να πάθουν βλάβη και οι δύο συγχρόνως είναι ίση με  $0,003 \cdot 0,003$ . Άρα, η πιθανότητα μιας ασφαλούς πτήσης είναι ίση με

$$1 - 0,003 \cdot 0,003 = 0,999991 \text{ δηλαδή } 99,9991\%.$$

**2.** Από τρεις όμοιες μηχανές ενός εργοστασίου η πρώτη (I) παράγει το 20%, η δεύτερη (II) το 30% και η τρίτη (III) το 50% της συνολικής παραγωγής ενός εξαρτήματος. Επιπλέον, το 5% της παραγωγής της μηχανής I, το 4% της II και το 2% της III είναι ελαττωματικά εξαρτήματα.

Δύο ερωτήσεις του λεγόμενου ποιοτικού ελέγχου είναι οι εξής:

- Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα εξάρτημα σε ένα κατάστημα πωλήσεων ποια είναι η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό;
- Αν ένα εξάρτημα που επιλέχθηκε τυχαία είναι ελαττωματικό, ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από τη μηχανή I;

### ΛΥΣΗ

Αν  $A_1$ ,  $A_2$  και  $A_3$  είναι τα ενδεχόμενα το επιλεγμένο εξάρτημα να προέρχεται από τις μηχανές I, II και III αντιστοίχως, τότε  $P(A_1) = 0,2$ ,  $P(A_2) = 0,3$  και  $P(A_3) = 0,5$ . Τα  $A_1$ ,  $A_2$  και  $A_3$  είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και επιπλέον  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ .

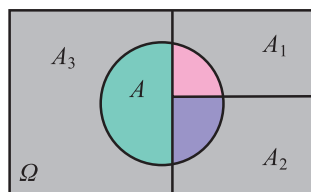
Αν  $A$  είναι το ενδεχόμενο το επιλεγμένο εξάρτημα να είναι ελαττωματικό, τότε

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup (A \cap A_3)$$

και

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3).$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε  $P(A|A_1) = 0,05$ ,  $P(A|A_2) = 0,04$  και  $P(A|A_3) = 0,02$ . Επομένως:



i) Από την (1) και τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

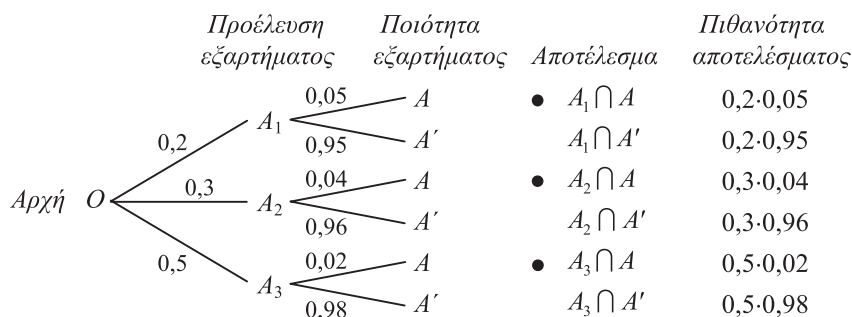
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) \cdot P(A|A_1) + P(A_2) \cdot P(A|A_2) + P(A_3) \cdot P(A|A_3) \\ &= 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,02 = 0,032. \end{aligned}$$

ii) Ζητάμε την πιθανότητα  $P(A_1|A)$ . Έχουμε

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|A_1) \cdot P(A_1)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,032} = \frac{0,01}{0,032} = 0,3125,$$

δηλαδή, 31,25%.

Η λύση προβλημάτων όπως το προηγούμενο, διευκολύνεται με τη βοήθεια ενός δεντροδιαγράμματος, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Οι κλάδοι  $OA_1$ ,  $OA_2$  και  $OA_3$  αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα προέλευσης του εξαρτήματος από τις μηχανές I, II και III αντιστοίχως, και οι αντίστοιχες πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών είναι γραμμένες πάνω στους κλάδους. Από το τέλος κάθε τέτοιου κλάδου ξεκινούν δύο άλλοι κλάδοι, που αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό ή μη ελαττωματικό με γραμμένες πάλι επάνω τους τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα (i) επισημαίνουμε πρώτα τις διαδρομές που οδηγούν σε ελαττωματικό εξάρτημα.

Οι διαδρομές αυτές είναι οι  $OA_1A$ ,  $OA_2A$  και  $OA_3A$  και αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα  $A_1 \cap A$ ,  $A_2 \cap A$  και  $A_3 \cap A$ .

Στη συνέχεια με εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού νόμου των πιθανοτήτων υπολογίζουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών. Έχουμε

$$P(A_1 \cap A) = 0,2 \cdot 0,05, \quad P(A_2 \cap A) = 0,3 \cdot 0,04 \quad \text{και} \quad P(A_3 \cap A) = 0,5 \cdot 0,02.$$

Τέλος, επειδή τα ενδεχόμενα που παριστάνουν οι διαδρομές είναι ασυμβίβαστα, προσθέτουμε τις παραπάνω πιθανότητες και βρίσκουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$ . Επομένως

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,02 = 0,032.$$

## ΣΧΟΛΙΟ

Στο δεύτερο ερώτημα της παραπάνω εφαρμογής γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του πειράματος και ζητάμε την πιθανότητα να προέρχεται το εξάρτημα από τη μηχανή I. Η πιθανότητα αυτή  $P(A_1|A)$  λέγεται “εκ των υστέρων (a posteriori) πιθανότητα”, ενώ η  $P(A_1)$  λέγεται “εκ των προτέρων (a priori) πιθανότητα”.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ρίχνει κάποιος ένα ζάρι και αναγγέλλει ότι έφερε ζυγό αριθμό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει φέρει 6;
2. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνει κάποιος τυχαία ένα φύλλο και λέει ότι είναι “σπαθί”. Ποια είναι η πιθανότητα το φύλλο να είναι φιγούρα;
3. Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύουν  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$  και  $P(A|B) = \frac{4}{5}$ . Να υπολογίσετε τις πιθανότητες  $P(A \cap B)$ ,  $P(B|A)$  και  $P(A' \cup B)$ .
4. Αν  $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{4}$  και  $P(A) = \frac{2}{3}$ , να βρείτε την  $P(B)$ .
5. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε 6 στην πρώτη ρίψη και περιττό αριθμό στη δεύτερη ρίψη.
6. Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινες και 8 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε από το κουτί τυχαίως μια μπάλα, σημειώνουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η πρώτη μπάλα να είναι μαύρη και η δεύτερη κόκκινη.
7. Τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ανεξάρτητα και ισχύουν  $P(A) = \frac{1}{4}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ . Να βρείτε τις  $P(B)$  και  $P(A \cup B)$ .

8. Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύουν  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A|B) = \frac{2}{3}$  και  $P(B|A) = \frac{1}{2}$ .

i) Είναι τα  $A$  και  $B$  ανεξάρτητα; ii) Είναι τα  $A$  και  $B$  ξένα μεταξύ τους;  
iii) Να υπολογίσετε την  $P(B)$ .

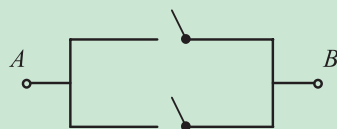
9. Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδείξετε ότι

$$P(A|B) + P(A'|B) = 1.$$

10. Σε ένα Γυμνάσιο στις εξετάσεις του Ιουνίου το 25% έγραψε στα Μαθηματικά κάτω από τη βάση, το 15% έγραψε στη Φυσική κάτω από τη βάση και το 10% των μαθητών έγραψε και στα δύο μαθήματα κάτω από τη βάση. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή του Γυμνασίου αυτού.
- i) Αν έχει αποτύχει στη Φυσική, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;  
ii) Αν έχει αποτύχει στα Μαθηματικά ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στη Φυσική;

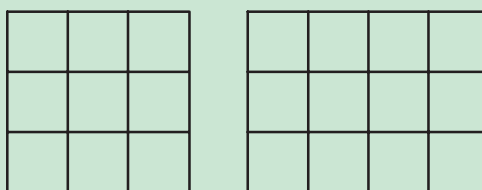
### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο διπλανό κύκλωμα “εν παραλλήλω” η πιθανότητα κάθε διακόπτης να είναι κλειστός (δηλαδή να επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος) είναι 0,8. Οι διακόπτες λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να διέρχεται ρεύμα από το  $A$  στο  $B$ .



2. Η πιθανότητα να πάθει βλάβη μέσα στον πρώτο χρόνο λειτουργίας της μια μηχανή ορισμένου τύπου είναι 10%. Αν μια βιομηχανία έχει δύο τέτοιες μηχανές, οι οποίες άρχισαν να λειτουργούν συγχρόνως και ανεξάρτητα η μια από την άλλη, να βρείτε την πιθανότητα η μία μόνο να πάθει βλάβη μέσα στον πρώτο χρόνο λειτουργία τους.
3. Σε ένα νησί φτάνουν καθημερινά πλοία, που αναχωρούν από Πειραιά και Ραφήνα και σε ποσοστά 60% και 40% αντιστοίχως. Το 10% των πλοίων από Πειραιά και το 5% των πλοίων από Ραφήνα φθάνουν με καθυστέρηση στο νησί. Αν μια μέρα επιλέξουμε τυχαία ένα πλοίο που φτάνει στο νησί, να βρεθούν οι πιθανότητες:
- i) Να φτάσει με καθυστέρηση ii) Αν φτάσει με καθυστέρηση, να έρχεται από Πειραιά.

4. Σε ένα εργοστάσιο το 60% των εργαζομένων είναι άνδρες και το 40% είναι γυναίκες. Από τους άνδρες καπνίζει το 50% και από τις γυναίκες το 30%. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο που καπνίζει, ποια η πιθανότητα να είναι γυναίκα;
5. Μια κληρωτίδα περιέχει  $n$  λαχγούς από τους οποίους κερδίζει μόνο ένας. Δύο άτομα παίρνουν το ένα μετά το άλλο από την κληρωτίδα ένα ακριβώς λαχνό χωρίς επανατοποθέτηση. Κάποιος υποστηρίζει ότι το πρώτο άτομο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει από το δεύτερο. Να εξετάσετε αν έχει δίκιο.
6. Δύο κτήματα έχουν χωριστεί σε 9 και 12 οικόπεδα, όπως φαίνεται παρακάτω:



Επιλέγουμε τυχαίως και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο ένα οικόπεδο από κάθε κτήμα.

- Ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο οικόπεδα να είναι γωνιακά;
  - Ποια είναι η πιθανότητα ένα τουλάχιστον από τα οικόπεδα να είναι γωνιακό;
  - Ποια είναι η πιθανότητα κανένα από τα οικόπεδα να μην είναι γωνιακό;
7. Το 1% ενός πληθυσμού πάσχει από μια σοβαρή ασθένεια. Ένα καινούργιο τεστ διάγνωσης της ασθένειας έχει πιθανότητα θετικού σφάλματος (θετικό τεστ, ενώ το άτομο είναι υγιές) 1% και πιθανότητα αρνητικού σφάλματος (αρνητικό τεστ, ενώ το άτομο πάσχει από την ασθένεια) 5%. Για ένα τυχαίο άτομο από τον πληθυσμό αυτό το τεστ είναι θετικό. Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο να πάσχει πράγματι από την ασθένεια αυτή.

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$ . Δίνονται και οι πιθανότητες  $P(\kappa) = \frac{1}{2^\kappa}$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots, 100$ . Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(0)$ .
2. Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και  $A, B$  υποσύνολα του  $\Omega$ . Υποθέτουμε ότι  $P(A') \leq 0,28$  και  $P(B') \leq 0,71$ . Να αποδείξετε ότι i)  $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$  και ii)  $A \cap B \neq \emptyset$ .

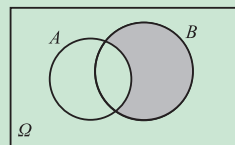
3. Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{\kappa} + \binom{\nu-1}{\kappa-1}$$

4. Ένα κουτί περιέχει μπάλες όμοιες σε σχήμα και σε μέγεθος, αλλά οι  $\kappa$  από αυτές είναι άσπρες και οι υπόλοιπες  $\lambda$  είναι μαύρες. Παίρνουμε δύο μπάλες τη μια κατόπιν της άλλης και χωρίς επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η 2η μπάλα να είναι μαύρη. Αν επανατοποθετήσουμε την 1η μπάλα, ποια είναι τότε η πιθανότητα η 2η μπάλα να είναι μαύρη; Τι παρατηρείτε;
5. Αν τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ανεξάρτητα, να αποδείξετε ότι είναι ανεξάρτητα και τα ενδεχόμενα: i)  $A'$  και  $B$  ii)  $A$  και  $B'$ , iii)  $A'$  και  $B'$ .

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Αν ρίξουμε δύο νομίσματα τα αποτελέσματα μπορεί να είναι δύο “κεφαλές”, μια “κεφαλή” και μια “γράμματα”, η δύο “γράμματα”, και επομένως, καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα  $\frac{1}{3}$ . Τι είναι λάθος στο επιχείρημα αυτό; Ποιο είναι το σωστό;
2. Ένα νόμισμα ρίχνεται 5 φορές και έρχεται κάθε φορά “κεφαλή”. Επομένως, η πιθανότητα να φέρουμε “κεφαλή” σε μια ρίψη του νομίσματος είναι  $\frac{5}{5} = 1$ . Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα αυτό.
3. Τρία συνηθισμένα ζάρια, ένα άσπρο, ένα μαύρο και ένα κόκκινο, τοποθετούνται σε ένα κουτί. Ένα πείραμα συνίσταται στην τυχαία επιλογή ενός ζαριού από το κουτί, στη ρίψη του ζαριού αυτού και στην παρατήρηση του χρώματος και της ένδειξης της άνω έδρας του.
  - α) Τι σημαίνει εδώ η λέξη “τυχαία”;
  - β) Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου του πειράματος είναι
    - i)  $3 \cdot 6$    ii)  $3^6$    iii)  $6!$    iv)  $6^3$    v)  $3 \cdot 6^3$ .
 (Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση)  
 (Σε καθεμιά από τις ερωτήσεις 4-7 μία μόνο από τις συνοδευτικές απαντήσεις είναι σωστή. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση).
4. Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,4, ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού;
  - α) 0,2   β) 0,8   γ) 0,6   δ) 1,4.
5. Αν τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι τέτοια ώστε  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ , ποια είναι η  $P(A \cup B)$ ;
  - α) 1   β)  $\frac{3}{4}$    γ)  $\frac{1}{4}$    δ)  $\frac{1}{16}$    ε) τίποτα από τα προηγούμενα.
6. Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα Venn το σκιασμένο εμβαδόν;
  - α)  $B$    β)  $A'$    γ)  $A - B$    δ)  $B - A$ .



7. Ποιος είναι ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 2 αγόρια και 3 κορίτσια από 10 αγόρια και 8 κορίτσια;

$$(\alpha) \quad \Delta_2^{10} \cdot \Delta_3^8 \quad (\beta) \quad \Delta_2^{10} + \Delta_3^8 \quad (\gamma) \quad \binom{10}{2} + \binom{8}{3} \quad (\delta) \quad \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3}$$

(Καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις 8-13 είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το Λ).

8. Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ    Λ

9. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι αντίθετα. Σ Λ

10. Αν δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους  $A'$  και  $B'$  είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

- 11.** Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι και ανεξάρτητα. Σ    Λ

- 12.** Δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

13. Αν δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ανεξάρτητα, τότε και τα αντίθετά τους είναι ανεξάρτητα.  $\Sigma \quad \Lambda$

14. Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ασυμβίβαστα, με  $P(A) = 0,6$  και  $P(B) = 0,2$ . Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης I στο ίσο του της στήλης II.

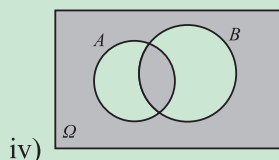
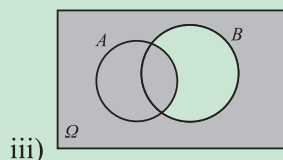
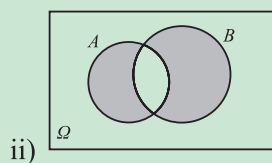
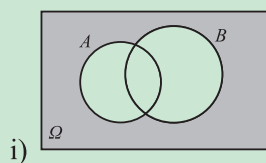
| <u>Στήλη I</u> | <u>Στήλη II</u> |
|----------------|-----------------|
| $P(A \cap B)$  | 0,8             |
| $P(A \cup B)$  | 0,6             |
| $P(A B)$       | 0               |
| $P(B A)$       | 0,2             |
|                | 0,12            |

15. Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ανεξάρτητα, με  $P(A) = 0,6$  και  $P(B) = 0,2$ . Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης I στο ίσο του της στήλης II.

| <u>Στήλη I</u> | <u>Στήλη II</u> |
|----------------|-----------------|
| $P(A \cap B)$  | 0,6             |
| $P(A \cup B)$  | 0,68            |
| $P(A B)$       | 0,2             |
| $P(B A)$       | 0,12            |

16. Αν τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ξένα μεταξύ τους, μπορεί να ισχύει  $P(A) + P(B) = 1,3$ ;  
-Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

17. Να γράψετε με τη βοήθεια των πράξεων των συνόλων το ενδεχόμενο που παριστάνει το σκιασμένο εμβადόν σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn:





## ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

### Ι ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

#### §1.1 Α΄ Ομάδας

1.  $-2, 2, 2$ .
2.  $6, 2, t = 2$  ή  $t = 3$ .
3.  $1, -1, \theta = \frac{\pi}{4}$  ή  $\theta = \frac{5\pi}{4}$ .
4.  $0, 1$ .
5.  $\mathbf{R} - \{1, 2\}$ .
6.  $\bullet 3 < x < 7$   
 $\bullet (-\infty, 3] \cup [7, +\infty)$ .
7.  $\bullet 3x^2 - 2$   
 $\bullet 6x^3 - 7x^2 + 1$   
 $\bullet \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x - 1}, x \neq \frac{1}{2}$ .
8. i) 4 ii)  $-10$  iii)  $\frac{5}{2}$  iv) 3 v)  $2\sqrt{2}$ .
9. i) 0 ii)  $\frac{5}{2}$  iii) 1 iv) 8 v)  $-10$  vi) 5.

#### §1.1 Β΄ Ομάδας

1. Να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα  
 $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$ .
2.  $E(x) = x(50 - \frac{x}{2}), 0 < x < 100$ .
3.  $\bullet V(h) = \pi \left( \frac{20-h}{2\pi} \right)^2 \cdot h, 0 < h < 20$   
 $\bullet E(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot (20 - 2\pi r), 0 < r < \frac{10}{\pi}$ .

4.  $\bullet v(\theta) = 10 \cdot \eta\mu\theta, 0^\circ < \theta < 180^\circ$   
 $\bullet E(\theta) = 50 \cdot \eta\mu\theta, 0^\circ < \theta < 180^\circ$ .
5. i)  $x - 5 = (\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})$  κτλ.  
ii)  $h = (1+h) - 1 = (\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)$  κτλ.

#### §1.2 Α΄ Ομάδας

1. i) 3 ii)  $-4$  iii) 10.
2.  $-\frac{1}{4}$ .
3. i)  $2\pi$  ii)  $4\pi$ .
4. i) 10 ii) 300.
5. i)  $y = 6x - 9$  ii)  $y = \frac{1}{2}x + 2$ .

#### §1.3 Α΄ Ομάδας

1. i) 0 ii)  $4x^3$  iii)  $9x^8$ .
2. i)  $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$  ii)  $-3x^{-4}$  iii)  $-5x^{-6}$ .
3. i)  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$  ii)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}}$ .
4. i)  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}$  ii)  $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$   
iii)  $-\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x^2}}$ .

5. i)  $12x^2$  ii)  $-30x^6$  iii)  $-8x^{10}$ .

6. i)  $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}$  ii)  $9\sqrt{x}$ .

7. i)  $4x^3 + 6x$  ii)  $2x - \frac{3}{x^2}$  iii)  $1 + \frac{1}{x^2}$ .

8. i)  $24x^2 - \sigma\upsilon\nu x$  ii)  $-6\eta\mu x - 8(2x + 1)$ .

9. i)  $7x^6 + 4x^3 + 3x^2$  ii)  $\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 2x$ .

10. i)  $\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x + 6x$   
ii)  $(8x + 3x^2)\eta\mu x + (4x^2 - 6x)\sigma\upsilon\nu x$ .

11. i)  $\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$  ii)  $\frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$

iii)  $\frac{2 + 2\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}$ .

12. i)  $\frac{\eta\mu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}$  ii)  $\frac{-6}{(x+1)^3}$ .

13. i)  $5(x-1)^4$  ii)  $10(2x+1)^4$   
iii)  $5(2x^2 - 3x)^4(4x-3)$ .

14. i)  $3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$  ii)  $3x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x^3$   
iii)  $\eta\mu 4x + 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x$  iv)  $\frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 3x}$ .

15. i)  $\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$  ii)  $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{1+\eta\mu x}}$ .

16. i)  $3e^{3x}$  ii)  $-2xe^{-x^2}$  iii)  $ae^{ax+\beta}$  iv)  $\frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$ .

17. i)  $\frac{1}{x}$  ii)  $-\frac{3}{x}$  iii)  $\frac{\alpha}{\alpha x + \beta}$  iv)  $\frac{1}{2(x-1)}$ .

18. i)  $\frac{1 - \ln x}{x^2}$  ii)  $e^x \left( \frac{1}{x} + \ln x \right)$ .

19. i) 1,08 ii)  $2(2 - \sqrt{3})$ .

20. i)  $\frac{1}{2}(t+2)$  ii)  $\frac{3}{2}, 2, 5$ .

21.  $\frac{10}{\sqrt{109}}$ .

22.  $\sqrt{3}$ .

**§1.3 Β' Ομάδας**

1. (0,0), (-2,6).

2. (1,8), (3,4).

3. (0,0), (-2,2).

4. •  $v(t) = 3t^2 - 4t + 1, t = \frac{1}{3}, t = 1$

•  $\alpha\left(\frac{1}{3}\right) = -2, \alpha(1) = 2$ .

5.  $f'(x) = -A\omega\eta\mu\omega x + B\omega\sigma\upsilon\nu\omega x$   
 $f''(x) = -A\omega^2\sigma\upsilon\nu\omega x - B\omega^2\eta\mu\omega x$  κτλ.

6.  $f'(x) = \alpha p e^{px} - \beta p e^{-px}$   
 $f''(x) = \alpha p^2 e^{px} + \beta p^2 e^{-px}$  κτλ.

7. -1, 4.

8.  $y = -x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$ .

9. i)  $P'(I) = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta I)^2}$   
ii) Να κάνετε τις πράξεις στο 2ο μέλος.

10. i)  $v(t) = A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t$   
 $\alpha(t) = -A\omega^2\eta\mu\omega t$   
ii)  $\alpha(t) = -\omega^2 \cdot y$   
iii)  $\alpha(t) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega t = \pm 1$  κτλ.

**§1.4 Α' Ομάδας**

1. i) Ελάχιστο:  $f(1) = -1$

ii) Μέγιστο:  $f(0) = 6$

iii) Ελάχιστο:  $f(1) = 3$ .

2. i) Μέγιστο:  $f(0) = 5$

Ελάχιστο:  $f(4) = -27$

ii) Ελάχιστο:  $f(-1) = -1$

Μέγιστο:  $f(1) = 3$ .

3. i)  $f'(x) = 6x^2$ , γνησίως αύξουσα

ii)  $f'(x) = -3x^2$ , γνησίως φθίνουσα

iii)  $f'(x) = 3(x-1)^2$ , γνησίως αύξουσα

iv)  $f'(x) = -3x^2 + 6x - 5 < 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , άρα γνησίως φθίνουσα.

4. 400.

5. Το τετράγωνο με πλευρά 10 m.

6. Πλευρά βάσης 4 dm, ύψος 2 dm.

7.  $4\text{dm}^3$ .

8.  $\left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ .

9.  $\lambda = c$ .

10. Καθένας είναι ίσος με 5.

---

**§1.4 Β' Ομάδας**


---

1.  $v'(r) = -100p \frac{1}{r} - 100q$ ,  
 $v''(r) = -100p \frac{1}{r^2} < 0$  κτλ.
2.  $v'(x) = -\kappa(2x \ln x + x)$ ,  
 $v''(x) = -\kappa(2 \ln x + 3)$  κτλ.
3. Πλευρά βάσης 40 cm, ύψος 10 cm.
4.  $20\sqrt{3} \approx 109,5$  m,  $\frac{16000}{20\sqrt{30}} \approx 146$  m.
5. Είναι το τετράγωνο.
6. Διάμετρος κύκλου =  $\frac{\lambda}{4 + \pi}$  = Πλευρά τετραγώνου.
7.  $t = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} - \ln\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)$ .
8. i)  $\frac{6000}{v} + 0,1 \cdot v^2$  ii)  $\sqrt[3]{30000} \approx 31$  Km / h.
9. Καθεμιά 225 Ω.
10. Θα έχουν, διότι η ελάχιστη απόσταση των πλοίων θα είναι  $\sqrt{80} < \sqrt{100} = 10$  Km.

---

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**


---

1. i)  $\approx 0,476$  ii)  $\rho = 0,5$ .
2. 16 μονάδες από 8 εργάτες.
3.  $(-1,3)$ .
4.  $p + q = (\alpha + \beta) - \left(\alpha\lambda + \frac{\beta}{\lambda}\right)$  κτλ.
5. Διάμετρος =  $\frac{40}{3}$  cm, ύψος =  $\frac{20}{3}$  cm.
6. Ύψος = Διάμετρος βάσης.
7.  $\frac{2\pi}{27} R^3 \sqrt{3}$ .
8. β) i) 5600, 5,6 , 4  
10600, 5,3 , 6  
17600, 5,87 , 8  
ii) 1612, 5,22
9. α)  $P'(x) = R'(x) - C'(x)$  κτλ.  
β) 2.500.
10. i)  $AG = \sqrt{d_1^2 + x^2}$ ,  $BG = \sqrt{d_2^2 + (d-x)^2}$  κτλ.

- ii)  $t'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}}$
- iii) Όταν  $t$  ελάχιστος, τότε  $t'(x) = 0$  κτλ.

---

**2 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**


---



---

**§ 2.1**


---

1. Ποιοτικές: γ, δ, στ, ζ  
Ποσοτικές-διακριτές: β, η, θ, ι  
Ποσοτικές-συνεχείς: α, ε
2. Είναι δυνατόν να έχουμε διάφορες μεταβλητές για κάθε περίπτωση. Για παράδειγμα:  
α) μισθός (ποσοτική-συνεχής), ηλικία (ποσοτική-διακριτή), φύλο (ποιοτική) κτλ.
3. (ε).
4. Είναι δυνατό να έχουμε διάφορους λόγους ακαταλληλότητας των επιλεγόμενων δειγμάτων. Για παράδειγμα:  
α) Θα έχουμε υπερεκτίμηση των ανδρών κτλ.

---

**§ 2.2 Α' Ομάδας**


---

1. β) i) 26% ii) 14% iii) 38%.
2. Έχουμε 11 αγόρια με βαθμό  $< 5$ , κτλ.
3. α) Το 22% των φοιτητών είναι αγόρια με βαθμό  $< 5$ , κτλ.
4. α) 76% β) 16% γ) 34% δ) 84% ε) 16%.
5. Από τη σχέση  $f_2 = \frac{v_2}{v}$  βρίσκουμε πρώτα το μέγεθος  $v = 20$ . Να βρεθεί μετά το  $N_1$  κτλ.
6. Να εργαστείτε όπως στο σχήμα 1(γ).
7. Να κατασκευάσετε πρώτα τον πίνακα συχνοτήτων και μετά να εργαστείτε όπως στα σχήματα 1(β) και 3.
8. Για τους  $v = 450$  μαθητές έχουμε 30% με τιμή  $x_2 = \text{“Λίαν καλώς”}$ . Δηλαδή  
 $f_2\% = 30 \Leftrightarrow v_2 = 135 \Leftrightarrow \alpha_2 = 108^\circ$  κτλ.
9. Να εργαστείτε όπως στα σχήματα 1(β) και 3.

10. Να εργαστείτε όπως στο σχήμα 1(γ).  
 11. Να εργαστείτε όπως στο σχήμα 5.  
 12. γ) 11 άτομα  
 δ) επίδοση  $\geq 7$ .  
 13. 50%.  
 14. ΝΑΙ. Το εμβαδόν πρέπει να είναι 100.

### § 2.2 Β' Ομάδας

1. Για τη Λέσβο υπάρχει πτωτική τάση ενώ για τη Σαλαμίνα υπάρχει ανοδική τάση.  
 Για τη Θάσο υπάρχει περίπου σταθερή κατάσταση.  
 2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

| Έτος | Ηλικία    |       |           | Σύνολο |
|------|-----------|-------|-----------|--------|
|      | $\leq 20$ | 21-30 | $\geq 31$ |        |
|      |           |       |           |        |

3. Ανάλογα με την άσκηση 2.  
 4. β) 355 γυναίκες, 434 άνδρες  
 γ) 692  
 δ) Δεν μπορούμε να ξέρουμε με τα στοιχεία που μας δίνονται.  
 5. Να εργαστείτε όπως στο σχήμα 5.  
 6. α) Φάρμακο Α 17,3% και Φάρμακο Β 26%.  
 7. Επειδή  $v = 55$  να χρησιμοποιήσετε  $k = 7$  κλάσεις με πλάτος  $c = 1,8$ .

### § 2.3 Α' Ομάδας

1. 10, 12, 14, 16, 18, 20 με διάμεσο  $\delta = 15$ .  
 2. α) ΝΑΙ, β) ΟΧΙ, γ) ΝΑΙ.  
 3. 8,25%.  
 4. α) 206,1 cm β) 235 cm.  
 5. 14,8.  
 6. Και στις 3 περιπτώσεις έχουμε:  
 $\bar{x} = 12 \text{ gr}$ ,  $\delta = 12 \text{ gr}$ ,  $M_0 = 13 \text{ gr}$ .  
 7. α) 14, β) 13.  
 8. 1291 ευρώ.  
 9. Οι 2 και 6.  
 10. α) 2, β) 2, γ) 3.  
 11. α)  $\bar{x} = 15,45$ , β)  $\delta = 15$ , γ)  $M_0 = 15$ ,  
 δ)  $Q_1 = 14$ ,  $Q_3 = 17$ .  
 12. α)  $\bar{x} = 4,3$  β)  $M_0 = 3,3$ , γ)  $Q_1 \approx 2,33$ ,  $\delta = 4$ ,  
 $Q_3 \approx 6$ .

13. α) 169,66 cm, β) 170 cm, γ) 169,67 cm.  
 14. α) Μικρότερη διασπορά έχουμε στη δεύτερη λίστα και μεγαλύτερη διασπορά στην τρίτη.  
 β) ΟΧΙ.  
 15. α)  $\bar{x} = 10$ ,  $M_0 = 11$ ,  $\delta = 11$   
 β)  $Q_1 = 7$ ,  $Q_3 = 13$   
 γ)  $R = 12$ ,  $s = 3,87$ ,  $cv = 38,7\%$ .  
 16. 2,47.  
 17. α) 16%, β) 2,5%, γ) 50%, δ) 81,5%.  
 18. α)  $\bar{x} = 3$ ,  $\delta = 2$   
 β)  $\bar{x} = 6$ ,  $\delta = 4$   
 γ)  $\bar{x} = 13$ ,  $\delta = 12$   
 δ)  $\bar{x} = 16$ ,  $\delta = 14$ .  
 19. α)  $s^2 = 4$ , β)  $s^2 = 36$ , γ)  $s^2 = 4$ ,  $s^2 = 4$ .  
 20.  $v = 28$ .

### § 2.3 Β' Ομάδας

1. β)  $\bar{x} = 15$ ,  $\delta \approx 15$  γ)  $P_{\infty} \approx 19$ .  
 2. 10 ή -2.  
 3. α)  $\bar{x} = 13,20$  ευρώ,  $\delta = 10,50$  ευρώ,  
 $M_0 = 9$  ευρώ.  
 β) Αυξάνουν κατά 18%.  
 γ) Αυξάνουν κατά 0,30 ευρώ.  
 4. Να γίνουν οι πράξεις.  
 5. α) 60, β) 33, γ) 5,2 χιλιάδες ευρώ,  
 δ)  $\bar{x} = 5,7$  χιλιάδες ευρώ,  $s^2 = 12,24$   
 ε)  $Q_1 \approx 2,8$ ,  $\delta \approx 5,4$ ,  $Q_3 \approx 8,3$ .  
 6. α)  $s = 23,29$ ,  $cv = 53,75\%$   
 β)  $Q = Q_3 - Q_1 \approx 59 - 24 = 35$ .  
 7. Να εργαστείτε όπως στο σχήμα 7.

### § 2.4 Α' Ομάδας

1. Να εργαστείτε όπως στο σχήμα 16.  
 2. i)  $y = 3 + \frac{5}{6}x$  ii)  $y = 46,7 + 0,67x$ .  
 3. α)  $\hat{y} = x$ , β)  $\hat{y} = 6 - x$ , γ)  $\hat{y} = 3,9 - 0,3x$   
 δ)  $\hat{y} = 2,1 + 0,3x$ .  
 4.  $\hat{y} = 18,98 - 21,6x$ .  
 5. α)  $\hat{y} = -0,35 + 1,07x$ , β) 16.

---

**§ 2.4 Β' Ομάδας**


---

- α) Η ηλικία.  
γ,δ) Καθένας από τους μαθητές μπορεί να φέρει τη "δική του" ευθεία, οπότε θα έχει και διαφορετική πρόβλεψη συστολικής πίεσης.
- α) 178,7 cm β) 177,5 cm.
- α) 168,3 cm β) 168,1 cm.
- α)  $\hat{y} = -1,88 + 1,18x$ .  
β) Περίπου 27 έτη και 7 μήνες.  
γ) Περίπου 1 έτος και 2 μήνες.
- α)  $\hat{x} = 5,25 + 0,72y$ .  
β) Περίπου 25 έτη και 5 μήνες.  
γ) Περίπου 9 μήνες.

---

**§ 2.5 Α' Ομάδας**


---

- 0, 0,2, -0,6, -0,7, 0,9, -1.
- α) Θετική -μεγάλη, κτλ.
- α)  $r = 0,99$  β)  $r = 0,59$  γ)  $r = -0,70$   
δ)  $r = -0,05$  ε)  $r = 0,33$ .
- α)  $r_1 = -1$  β)  $r_2 = 1$ .
- $r = 0,97$ .
- $r = 0,74$ .

---

**§ 2.5 Β' Ομάδας**


---

- α)  $r \approx -1$  β)  $r \approx -1$ .
- $r = 0,87$ .
- $r = 1$ .
- $r = 0,77$ .

---

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**


---

- $\bar{x} = 2,025$ ,  $\delta = 2$ ,  $M_0 = 1$ ,  $s = 1,49$ .
- α)  $v = 60$ ,  $\kappa = 5$ ,  $c = 2$  γ)  $\bar{x} = 4,4$ ,  $\delta = 4,3$ ,  
 $M_0 \approx 4,25$ ,  $s = 2,29$ .
- $v_1 = \frac{18}{100} \cdot 200 = 36$  κτλ.  
  
β)  $\bar{x} = 14,1$ ,  $s = 7,4$  γ) i) 8, ii) 22
- β)  $\bar{x}_{1990} \approx 486$ ,  $\bar{x}_{1994} \approx 372$  γ) 82, 94.

- α) i) τις ηλ. συσκευές τύπου Β  
ii) δεν έχουμε προτίμηση  
iii) τις ηλ. συσκευές τύπου Α.  
β)  $cv_A = 39,8\%$ ,  $cv_B = 38,8\%$ .
- α) Να εργαστείτε όπως στο σχήμα 1(γ).  
β) Ο σταθμικός μέσος.
- Να εργαστείτε όπως στο σχήμα 5.
- α)  $\hat{y} = 63,1 + 0,34x$  β) 68,9 κάτοικοι/km<sup>2</sup>
- γ)  $\hat{y} = 16,53 - 0,3x$ .
- α)  $\hat{y} = 0,06 + 0,36x$  β) 18,6 ευρώ γ) Πρέπει να βρείτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων της  $X$  πάνω στην  $Y$ .
- Δείτε και την άσκηση 7(α) Α' Ομάδας της §2.5.
- $\hat{F} = 32 + 1,8C$ .
- $r(X,Y) = \begin{cases} r(X,Y), & \text{εάν } \lambda > 0 \\ -r(X,Y), & \text{εάν } \lambda < 0 \end{cases}$
- $\hat{y} = 56,4 + 18,87x$   
 $\hat{y}_{1995} \approx 472$  διαζύγια  
 $\hat{y}_{2000} \approx 547$  διαζύγια.

---

**3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ**


---



---

**§ 3.1 Α' Ομάδας**


---

- 1-5. Να χρησιμοποιήσετε δένδροδιαγράμματα.
- i) Ασυμβίβαστα ii) Δεν είναι ασυμβίβαστα  
iii) Δεν είναι ασυμβίβαστα iv) Ασυμβίβαστα.
- $\{ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ\}$ .

---

**§ 3.1 Β' Ομάδας**


---

- $\Omega = \{αα, αβ, βα, ββ\}$ .
- Να βρείτε το δειγματικό χώρο και τα ενδεχόμενα με τη βοήθεια πίνακα διπλής εισόδου.
- Αν  $x \in B'$ , τότε  $x \notin B$  κτλ.
- Να χρησιμοποιήσετε διαγράμματα Venn.

---

**§ 3.2 Α' Ομάδας**


---

1. i)  $\frac{1}{13}$  ii)  $\frac{12}{13}$ .

2.  $\frac{1}{4}$ .

3. i)  $\frac{15}{40}$  ii)  $\frac{25}{40}$  iii)  $\frac{25}{40}$ .

4.  $\frac{9}{30}$ .

5. i)  $\frac{3}{11}$  ii)  $\frac{8}{11}$ .

6. i) 50% ii) 30%.

7.  $\frac{11}{30}$ .

8.  $\frac{2}{3}$ .

9. 0,4.

10.  $\frac{3}{4}$ .

11.  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \Leftrightarrow$   
 $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$  κτλ.

12. 65%.

13. α) 14% β) 12%.

14. 10%.

---

**§ 3.2 Β' Ομάδας**


---

1. i)  $\kappa + \lambda - \mu$  ii)  $1 - \kappa - \lambda + \mu$  iii)  $\kappa + \lambda - 2\mu$ .

2. 55%.

3.  $\frac{3}{7}$ ,  $\frac{4}{7}$ .

4. Αν  $P(A) = x$ , τότε  $P(A') = 1 - x$  κτλ.

5. Να λάβετε υπόψη ότι  $A \cap B \subseteq A$  και  
 $P(A \cup B) \leq 1$ .

6. Να λάβετε υπόψη ότι  $P(A') = 1 - P(A)$  και  
 $P(A \cup B) \leq 1$ .

---

**§ 3.3 Α' Ομάδας**


---

1. 1200,  $\frac{1}{3}$ .

2. 124416000,  $\frac{7}{48}$ .

3. 360,  $\frac{1}{3}$ .

4.  $7!$ ,  $\frac{2}{35}$ .

5.  $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu - \kappa)!} = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)! \kappa!}$  κτλ.

6.  $\binom{8}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ .

---

**§ 3.3 Β' Ομάδας**


---

1.  $\frac{5!}{5^4} = \frac{24}{125}$ .

2.  $1 - \frac{1}{\nu}$ .

3.  $\frac{1}{5}$ .

4.  $\frac{3}{32}$ .

5. i)  $\frac{3}{143}$  ii)  $\frac{140}{143}$  iii)  $\frac{42}{143}$ .

6. Περίπου 75%.

7. 2800,  $\frac{9}{28}$ .

8.  $\frac{1}{2^{n-1}}$ .

9.  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ .

10.  $\frac{17}{77}$ .

11.  $1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,518$ ,  $1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0,491$ .

---

**§ 3.4 Α' Ομάδας**


---

1.  $\frac{1}{3}$ .

2.  $\frac{3}{13}$ .

3.  $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}$ .

4.  $\frac{1}{3}$ .

5.  $\frac{1}{12}$ .

6.  $\frac{12}{49}$ .

7.  $\frac{4}{5}, \frac{17}{20}$ .

8. i) Όχι ii) Όχι iii)  $\frac{1}{4}$ .

9. Να λάβετε υπόψη ότι  
 $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ .

10. i)  $\frac{2}{3}$  ii)  $\frac{2}{5}$ .

---

### § 3.4 Β' Ομάδας

---

1. 0,96.

2. 18%.

3. i) 8% ii) 75%.

4.  $\frac{2}{7}$ .

5. Όχι, έχουν ίδια πιθανότητα.

6. i)  $\frac{4}{27}$  ii)  $\frac{17}{27}$  iii)  $\frac{10}{27}$ .

7.  $\frac{95}{1094} \approx 0,087$ , δηλαδή 8,7%.

---

### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

1. Να λάβετε υπόψη ότι  
 $P(0) + P(1) + \dots + P(100) = 1$ .

2. i)  $P(A') = 1 - P(A)$  κτλ.  
 ii) Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

3. Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο των συνδυασμών.

4. • Χωρίς επανατοποθέτηση:  $\frac{\lambda}{\kappa + \lambda}$

• Με επανατοποθέτηση:  $\frac{\lambda}{\kappa + \lambda}$ .

5. i) Να λάβετε υπόψη ότι  
 $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$   
 ii) Να λάβετε υπόψη ότι  
 $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$   
 iii)  $B' = (B' \cap A) \cup (B' \cap A')$  κτλ.

## Ευρετήριο Όρων

- αδύνατο ενδεχόμενο 140  
 αθροιστικές συχνότητες 66  
 αθροιστικές σχετικές συχνότητες 66  
 ανεξάρτητα ενδεχόμενα 168  
 ανεξάρτητη μεταβλητή 10, 105  
 αξιωματικός ορισμός πιθανότητας 149  
 απλός προσθετικός νόμος 150  
 απογραφή 59  
 ασυμβίβαστα ενδεχόμενα 142, 150  
 βασική αρχή απαρίθμησης 158  
 βέβαιο ενδεχόμενο 140  
 γραμμική συσχέτιση 117, 120  
 γραφική παράσταση συνάρτησης 11  
 δείγμα 60  
 δειγματικός χώρος 139  
 δειγματοληψία 60  
 δειγματοληψία με επανατοποθέτηση 144  
 δεντροδιάγραμμα 157  
 δεσμευμένη πιθανότητα 166  
 δεύτερη παράγωγος 27  
 δημοσκοπήση 57  
 διάγραμμα διασποράς 106  
 διάγραμμα συχνοτήτων 69  
 διακριτή μεταβλητή 59  
 διακύμανση 93  
 διαλογή 65, 72  
 διάμεσος 87  
 διάμεσος ομαδοποιημένης κατανομής 88  
 διασπορά 93  
 διατάξεις 158  
 εκατοστημόριο 89  
 εκθετική συνάρτηση 12  
 εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων 110  
 ενδεχόμενο 139  
 ενδοτεταρτημοριακό εύρος 92  
 εξαρτημένα ενδεχόμενα 168  
 εξαρτημένη μεταβλητή 10, 105  
 εξίσωση γραφικής παράστασης 11  
 επαγωγή 56  
 επικρατούσα τιμή 90  
 ευθεία παλινδρόμησης 107  
 ευνοϊκές περιπτώσεις 140, 148  
 εύρος 72, 92  
 εφαπτομένη καμπύλης 19  
 ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα 148  
 ιστόγραμμα 73  
 ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων 74  
 καμπύλη συχνοτήτων 76  
 κανόνες παραγωγίσης 30  
 κανονική κατανομή 76  
 καμπύλη συνάρτησης 11  
 κατανομή συχνοτήτων 66  
 κατηγορική μεταβλητή 58  
 κεντρική τιμή κλάσης 71  
 κλάσεις 71  
 κλάσεις ανίσου πλάτους 74  
 κλάσεις ίσου πλάτους 73  
 κλασικός ορισμός πιθανότητας 149  
 κορυφή 90  
 κριτήριο δεύτερης παραγώγου 42  
 κριτήριο πρώτης παραγώγου 39  
 κυκλικό διάγραμμα 70  
 κύμανση 92  
 λογαριθμική συνάρτηση 12  
 μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων 108  
 μέση τιμή 85  
 μεταβλητή 58  
 μεταθέσεις 159  
 μέτρα ασυμμετρίας 84  
 μέτρα διασποράς 91  
 μέτρα θέσης 84  
 μονοτονία 13  
 ολικό ελάχιστο 14  
 ολικό μέγιστο 14  
 ομαδοποίηση παρατηρήσεων 71  
 ομοιογένεια 97  
 ομοιόμορφη κατανομή 76  
 όρια κλάσης 71  
 όριο συνάρτησης 14  
 παλινδρόμηση 105  
 παραβολή 12  
 παραγοντικό 159  
 παράγωγος συνάρτησης 27  
 παράγωγος σύνθετης συνάρτησης 32  
 παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  22  
 πείραμα τύχης 138  
 περιγραφική στατιστική 56  
 πίνακας συχνοτήτων 66  
 πλάτος κλάσης 72  
 πληθυσμός 58

|                            |        |                                  |     |
|----------------------------|--------|----------------------------------|-----|
| ποιοτική μεταβλητή         | 58     | συνάρτηση πραγματική             | 10  |
| πολλαπλασιαστικός νόμος    | 167    | συνάρτηση συνεχής                | 16  |
| πολύγωνο συχνοτήτων        | 69, 74 | συνάρτηση συνημίτονο             | 12  |
| ποσοτική μεταβλητή         | 59     | συνάρτηση φθίνουσα               | 13  |
| πράξεις με ενδεχόμενα      | 140    | συνδυασμοί                       | 160 |
| πράξεις με συναρτήσεις     | 11     | συνεχής μεταβλητή                | 59  |
| προσθετικός νόμος          | 151    | συντελεστής γραμμικής συσχέτισης | 118 |
| ραβδόγραμμα                | 67     | συντελεστής μεταβολής            | 96  |
| ρυθμός μεταβολής           | 23     | συχνότητα                        | 65  |
| σημειόγραμμα               | 70     | συχνότητα κλάσης                 | 72  |
| σταθμικός μέσος            | 86     | σχεδιασμός πειραμάτων            | 56  |
| στατιστική ομαλότητα       | 148    | σχετική συχνότητα                | 65  |
| στατιστικοί πίνακες        | 62     | τεταρτημόριο                     | 89  |
| στιγμιαία ταχύτητα         | 20     | τοπικό ελάχιστο                  | 14  |
| συμπληρωματικά ενδεχόμενα  | 150    | τοπικό μέγιστο                   | 14  |
| συνάρτηση αύξουσα          | 13     | τυπική απόκλιση                  | 95  |
| συνάρτηση γνησίως μονότονη | 13     | υπερβολή                         | 12  |
| συνάρτηση ημίτονο          | 12     | χρονόγραμμα                      | 71  |









Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

*Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.*

