

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες

ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$ (Μονάδες 10)

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = -(\lambda^2 + 5)$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(\lambda^2 + 5)] = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$$

β) Έχουμε $5\lambda^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $20 > 0$ οπότε $\Delta > 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$$

έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$ (1)

Από τους τύπους Vieta έχουμε $x_1 + x_2 = S = \frac{-\beta}{\alpha} = \lambda$ και $x_1 x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = -(\lambda^2 + 5)$

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$-(\lambda^2 + 5) - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β . (Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = -4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

β) i) Ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 &= 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση.

ii) Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι $x_1 = 4$ ή $x_2 = -1$. Στο σκέλος (βi) αποδείξαμε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) άρα πρέπει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 4 \text{ ή } \frac{\alpha}{\beta} = -1$$

Επειδή οι α , β είναι ομόσημοι η περίπτωση $\frac{\alpha}{\beta} = -1$ απορρίπτεται. Άρα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$$

δηλαδή, ο α είναι τετραπλάσιος του β .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω .

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$. (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 3n - 2$. (Μονάδες 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; (Μονάδες 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; (Μονάδες 6)

α) Είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_{20} - \alpha_{10} &= \alpha_1 + (20 - 1)\omega - [\alpha_1 + (10 - 1)\omega] = \\ &= \alpha_1 + 19\omega - \alpha_1 - 9\omega = 10\omega \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30 \Leftrightarrow 10\omega = 30 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Τότε:

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \alpha_1 + (v - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_v = 1 + (v - 1)3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_v = 1 + 3v - 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_v = 3v - 2 \end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_v &> 30 \Leftrightarrow 3v - 2 > 30 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3v > 32 \Leftrightarrow v > \frac{32}{3} \cong 10,6 \end{aligned}$$

Άρα ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30 είναι ο 11ος.

δ) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \alpha_v &< 60 \Leftrightarrow 3v - 2 < 60 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3v < 62 \Leftrightarrow v < \frac{62}{3} \cong 20,6 \end{aligned}$$

Επομένως 20 όροι είναι μικρότεροι του 60.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{\alpha}{4}}$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο

$A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$x^2 - x + \frac{\alpha}{4} \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$ οπότε το τριώνυμο είναι μη αρνητικό αν και μόνο αν:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow 1 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$$

β) i) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ αν και μόνο αν:

$$f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 - 0 + \frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

ii) Για $\alpha = 1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

Τότε:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ή } x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ή } x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 0) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(1-2\lambda)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm (1-2\lambda)}{2} = \begin{cases} \frac{1+1-2\lambda}{2} = 1 - \lambda \\ \frac{1-1+2\lambda}{2} = \lambda \end{cases}$$

Τότε:

$$0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < |1 - \lambda - \lambda| < 2 \Leftrightarrow 0 < |1 - 2\lambda| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0 < |1 - 2\lambda| \text{ και } |1 - 2\lambda| < 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\lambda \neq 0 \text{ και } -2 < 1 - 2\lambda < 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda \neq 1 \text{ και } -3 < -2\lambda < 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda \neq \frac{1}{2} \text{ και } -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες

τιμές του λ ισχύει:
$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$$
 (Μονάδες 9)

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή $\Delta = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0$, η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Τελικά η εξίσωση έχει δύο ρίζες για $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1 \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$$

Τότε:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow d(x_1, x_2) \cdot d(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1^2 - 4(\lambda - \lambda^2) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4(\lambda - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } 1 - \lambda = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = \\ &= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2\end{aligned}$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta &= 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

γ) Για να έχει η συνάρτηση πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αρκεί να ισχύει:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$, πρέπει:

$$\begin{aligned}\Delta &\leq 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο

έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$ (Μονάδες 4)

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$. (Μονάδες 5)

i) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Το τριώνυμο έχει δύο (πραγματικές) ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta = 0 &\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

γ) i) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 &\Leftrightarrow \left(x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x_1 < x_1 + x_2 \text{ και } x_1 + x_2 < 2x_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ και } x_1 < x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2,\end{aligned}$$

που ισχύει από υπόθεση.

ii) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	x_1	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	x_2	$x_2 + 1$	$+\infty$
$x^2 - x + \lambda - \lambda^2$	+	○	-	○	+	

Είναι:

$$f(x_2) = 0, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0, f(x_2 + 1) > 0$$

Άρα:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2 + 1)$$

ΘΕΜΑ 4

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;
(Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 . (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ . (Μονάδες 7)

α) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $x = -5$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\lambda &= (2(-5) + 5)^2 - 8 \cdot (-5) = \\ &= (-10 + 5)^2 + 40 = (-5)^2 + 40 = \\ &= 25 + 40 = 65\end{aligned}$$

β) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $\lambda = 20$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}20 &= (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 20 &= 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 &= 0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + 5$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{-12+8}{8} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-12-8}{8} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\lambda &= (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25 - \lambda) &= 0 \quad (2)\end{aligned}$$

i) Έστω ότι ο εξαγόμενος αριθμός μπορεί να γίνει $\lambda = 5$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}4x^2 + 12x + (25 - 5) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 20 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 &= 0 \quad (3)\end{aligned}$$

Η εξίσωση (3) είναι αδύνατη διότι έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο.

ii) Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + (25 - \lambda)$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 25 - \lambda$.

Πρέπει η εξίσωση (2) να έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta_0 \geq 0 &\Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (25 - \lambda) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16\lambda \geq 256 &\Leftrightarrow \lambda \geq 16\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\beta}{1} = \beta$$

Είναι:

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2| = 4 &\Leftrightarrow |S| = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow (\beta = -4 \text{ ή } \beta = 4) \end{aligned}$$

β) Επειδή η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |\beta|^2 > 4\gamma \Leftrightarrow 16 > 4\gamma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma < 4 \end{aligned}$$

γ) • Για $\beta = 4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (2) $|x| = y$ (3) με $y > 0$ και βρίσκουμε:

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \text{ δεκτές}$$

• Για $y = 3$ η σχέση (3) δίνει:

$$|x| = 3 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = -3)$$

• Για $y = 1$ η σχέση (3) δίνει:

$$|x| = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -1)$$

• Για $\beta = -4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - (-4)|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 4|x| + 3 = 0 \quad (5)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (5) $|x| = \omega$ (6) με $\omega > 0$ και βρίσκουμε:

$$\omega^2 + 4\omega + 3 = 0 \quad (7)$$

Η εξίσωση (7) έχει διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = -1 \\ \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases} \text{ απορρίπτονται}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι

επίσης ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

(Μονάδες 12)

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$ έχει $\alpha = 1, \beta = -\lambda, \gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4$$

Η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow (\lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2)$$

β) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) την επαληθεύει, ισχύει δηλαδή ότι:

$$\rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0 \quad (2) \text{ προφανώς } \rho \neq 0$$

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν:

$$\frac{1}{\rho^2} - \lambda \frac{1}{\rho} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda\rho + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0,$$

που ισχύει λόγω της (2).

γ) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda > 0 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

Επειδή $S > 0$ και $P > 0$ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) Ισχύει ότι:

$$P = x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{x_1} \quad (3)$$

Τότε:

$$x_1 + 4x_2 \geq 4 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} x_1 + 4\frac{1}{x_1} \geq 4 \stackrel{x_1 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 4 \geq 4x_1 \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$. (Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$. (Μονάδες 9)

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$. (Μονάδες 7)

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 1 + 2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta = -3\alpha \quad (1)$$

και

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 1 \cdot 2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha \quad (2)$$

β) i) Ισχύει ότι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \alpha(x - 1)(x - 2) > 0 \quad (3)$$

Είναι:

$$1 < x < 2 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 2) \Leftrightarrow (0 < x - 1 \text{ και } x - 2 < 0)$$

Άρα $(x - 1)(x - 2) < 0$. Τότε από την (3) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha < 0$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \gamma x^2 + \beta x + \alpha &< 0 \stackrel{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow 2\alpha x^2 + (-3\alpha)x + \alpha &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha(2x^2 - 3x + 1) &< 0 \stackrel{\alpha < 0}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 &> 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3+1}{4} = 1 \\ \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2x^2 - 3x + 1$	+	$\circ$	-	$\circ$	+

Επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 > 0 &\Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$$

όπου α, β δύο **θετικοί** αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β . (Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4. \quad (\text{Μονάδες 7})$$

α) Είναι:

$$\begin{aligned}\Delta &= [-(\alpha^2 + \beta^2)]^2 - 4 \cdot \alpha\beta \cdot \alpha\beta = \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 = \\ &= \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)^2\end{aligned}$$

β) Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta &> 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 \neq 0 &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) &\neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha - \beta \neq 0 \text{ και } \alpha + \beta &\neq 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha \neq \beta \text{ και } \alpha &\neq -\beta)\end{aligned}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-[-(\alpha^2 + \beta^2)] \pm \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2}}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm (\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} = \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{2\beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}\end{aligned}$$

γ) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}(1 + x_1)(1 + x_2) &\geq 4 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} &\geq 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 &\geq 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &\geq 2 \stackrel{\alpha\beta > 0}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \alpha\beta \frac{\beta}{\alpha} + \alpha\beta \frac{\alpha}{\beta} &\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta &\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε θετικούς αριθμούς α, β .

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+kx-4$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

α) Το τριώνυμο $3x^2 + κx - 4$ έχει $α = 3$, $β = κ$, $γ = -4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \kappa^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = \kappa^2 + 48$$

Επειδή ισχύει $\Delta > 0$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-4}{3} < 0$$

Άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.

γ) Επειδή $x_1 < x_2$ και οι ρίζες είναι ετερόσημες, ισχύει ότι:

$$x_1 < 0 \text{ και } x_2 > 0$$

Επίσης είναι: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, άρα:

$$\alpha < 0 \text{ και } \beta > 0 \quad (1)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	α	x_1	x_2	β	$+\infty$
$3x^2 + \kappa x - 4$	+	+	○	-	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$f(\alpha) > 0 \text{ και } f(\beta) > 0 \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε:

$$\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta) < 0$$

ΘΕΜΑ 4

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6 & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

ii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0,6x, \text{ για } x \geq 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

α) i) Αν κάποιος λείπει από το σπίτι του έχει κατανάλωση $x = 0$ κυβικά νερού. Επειδή $0 \in [0, 30]$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $12 + 0,5x$ και το ποσό που θα πληρώσει είναι:

$$f(0) = 12 + 0,5 \cdot 0 = 12 \text{ ευρώ}$$

ii) Επειδή $10 \in [0, 30]$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $12 + 0,5x$ και το ποσό που θα πληρώσει για κατανάλωση 10 κυβικών μέτρων νερού είναι:

$$f(10) = 12 + 0,5 \cdot 10 = 12 + 5 = 17 \text{ ευρώ}$$

iii) Επειδή $50 \in (30, +\infty)$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $0,7x + 6$ και το ποσό που θα πληρώσει για κατανάλωση 50 κυβικών μέτρων νερού είναι:

$$f(50) = 0,7 \cdot 50 + 6 = 35 + 6 = 41 \text{ ευρώ}$$

β) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Ο κάτοικος της πόλης Α κατανάλωσε x κυβικά νερού με $x \in [0, 30]$. Επειδή ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x) > g(x) &\Leftrightarrow 12 + 0,5x > 12 + 0,6x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 12 - 12 > 0,7x - 0,6x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 > 0,1x \Leftrightarrow x < 0, \end{aligned}$$

άτοπο διότι $x \in [0, 30]$.

Επομένως ο κάτοικος της πόλης Α δεν μπορεί να κατανάλωσε από έως και 30 κυβικά νερού.

2^η περίπτωση

Ο κάτοικος της πόλης Α κατανάλωσε x κυβικά νερού με $x \in (30, +\infty)$. Επειδή ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει:

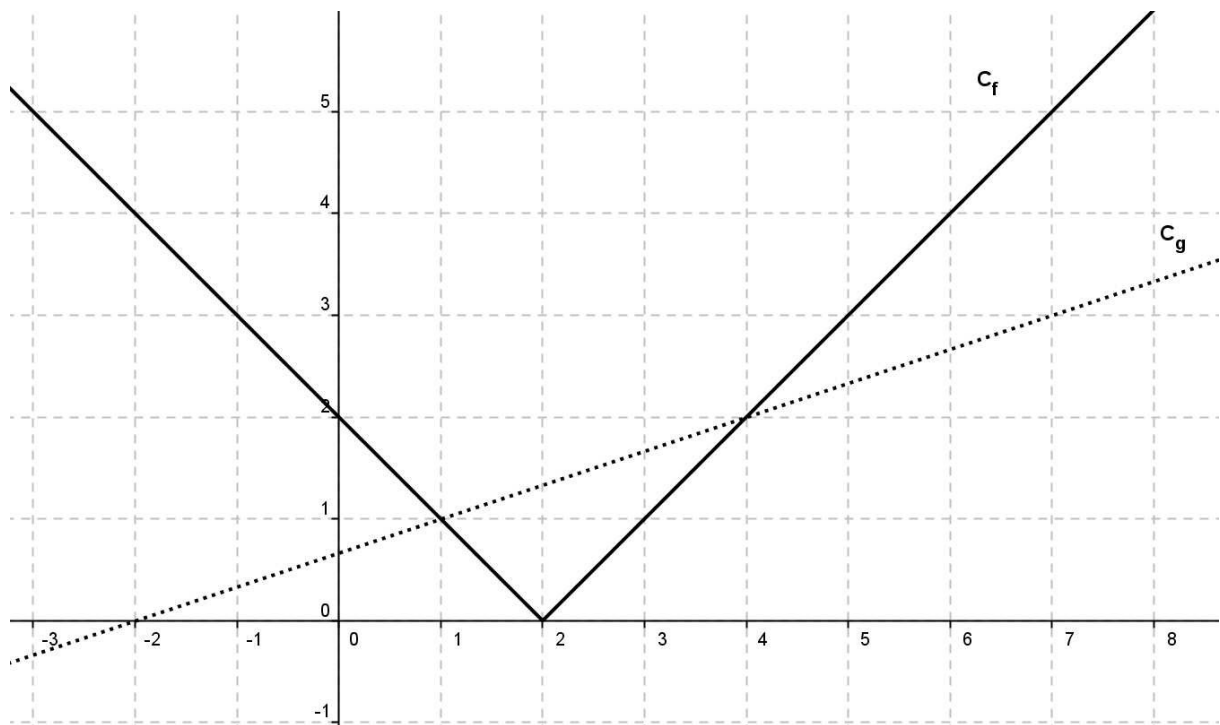
$$\begin{aligned} f(x) > g(x) &\Leftrightarrow 0,7x + 6 > 12 + 0,6x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,7x - 0,6x > 12 - 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,1x > 6 \Leftrightarrow x > 60 \end{aligned}$$

Επομένως, τόσο ο κάτοικος της πόλης Α όσο και της Β κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά νερού.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x)=|x-2| \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$



- α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g . (Μονάδες 6)
- β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)
- γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g . (Μονάδες 6)
- δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2-x| - (x+2)} \quad \text{(Μονάδες 5)}$$

α) Παρατηρώντας το σχήμα, τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι κατ' εκτίμηση τα $A(1, 1)$ και $B(4, 2)$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x - 2| = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad (1)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Για $x \geq 2$, είναι $|x - 2| = x - 2$ οπότε η (1) γράφεται:

$$x - 2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x - 6 = x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - x = 6 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4, \text{ δεκτή}$$

Για $x = 4$ είναι $f(4) = |4 - 2| = 2$.

Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $A(4, 2)$.

2^η περίπτωση

Για $x \leq 2$, είναι $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ οπότε η (1) γράφεται:

$$2 - x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6 - 3x = x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = x + 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1, \text{ δεκτή}$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = |1 - 2| = 1$.

Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $B(1, 1)$.

γ) Από το διάγραμμα που δίνεται διαπιστώνουμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g αν και μόνο αν $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

δ) Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$3|2 - x| - (x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 3|2 - x| \geq (x + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2 - x| \geq \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Επομένως αναζητούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g καθώς και τα σημεία στα οποία είναι ίσες. Από το σκέλος (γ) βρίσκουμε ότι:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = 2\lambda - 1$, $\gamma = \lambda - 1$ και διακρίνουμε:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda - 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) = \\ &= 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 1\end{aligned}$$

Άρα η διακρίνουσα Δ είναι σταθερή.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(2\lambda - 1) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot \lambda} = \frac{1 - 2\lambda \pm 1}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{2 - 2\lambda}{2\lambda} = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \\ \frac{-2\lambda}{2\lambda} = -1 \end{cases}$$

γ) Η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι $|x_2 - x_1|$.

Τότε:

$$\begin{aligned}|x_2 - x_1| &= 2 \Leftrightarrow \left| -1 - \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-\lambda - 1 + \lambda}{\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\lambda} = 2 \text{ ή } \frac{1}{\lambda} = -2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\lambda = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία. (Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (Μονάδες 10)

α) Για $\alpha = 1$ ο τύπος της g γράφεται: $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$$

- Για $x = 0$ είναι $g(0) = 0 + 1 = 1$.
- Για $x = 1$ είναι $g(1) = 1 + 1 = 2$.

Επομένως τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα:

$$A(0, 1) \text{ και } B(1, 2)$$

β) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε δύο σημεία αν και μόνο αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει δύο λύσεις. Τότε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \alpha = 0 \quad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - \alpha) = \\ &= 1 - 4 + 4\alpha = 4\alpha - 3 \end{aligned}$$

Για να έχει λοιπόν η εξίσωση (1) δύο λύσεις πρέπει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha > 3 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{4}$$

γ) Επειδή $\alpha > 1 > \frac{3}{4}$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες τις x_1, x_2 . Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1 - \alpha < 0$$

Οπότε οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ετερόσημες.

ΘΕΜΑ 4

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

(Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

(Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

(Μονάδες 9)

α) Είναι:

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa + 1)^2 - \kappa^2 = \\ &= (\kappa + 1 - \kappa)(\kappa + 1 + \kappa) = 2\kappa + 1 \quad (1)\end{aligned}$$

Άρα η διαφορά ω είναι περιττός αριθμός.

β) i) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha_1 + \omega \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \kappa^2 = 2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0\end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Η τιμή $\kappa = -1$ απορρίπτεται διότι πρέπει $\kappa > 1$. Άρα $\kappa = 3$.

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\omega = 2 \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow \omega = 7$$

ii) Έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha_v &= 1017 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = 1017 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + (v-1)7 = 1017 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + 7v - 7 = 1017 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7v = 1022 \Leftrightarrow v = 146\end{aligned}$$

Άρα ο 146ος όρος είναι ίσος με 1017.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$|x - 3| \leq 5 \quad (\text{Μονάδες 5})$$

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$||x| - 3| \leq 5$$

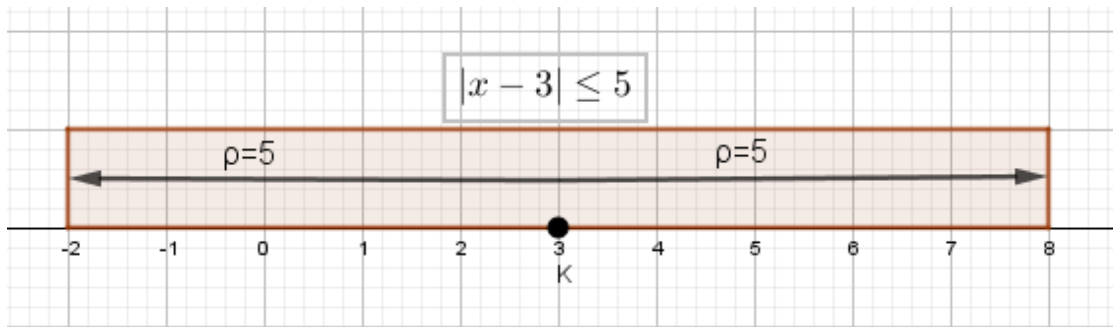
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|x - 3| \leq 5 &\Leftrightarrow -5 \leq x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -5 + 3 &\leq x - 3 + 3 \leq 5 + 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 \leq x &\leq 8 \Leftrightarrow x \in [-2, 8]\end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

Η ανίσωση $|x - 3| \leq 5$ περιγράφει το σύνολο των αριθμών x που ανήκουν σε διάστημα με κέντρο $K(3)$ και ακτίνα $\rho = 5$, δηλαδή το διάστημα $[-2, 8]$.



γ) Οι ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα $[-2, 8]$ είναι οι:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

δ) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}||x| - 3| \leq 5 &\Leftrightarrow -5 \leq |x| - 3 \leq 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -5 + 3 &\leq |x| - 3 + 3 \leq 5 + 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 \leq |x| &\leq 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-2 \leq |x| &\text{ και } |x| \leq 8) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\text{ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} &\text{ και } -8 \leq x \leq 8) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 8 &\Leftrightarrow x \in [-8, 8]\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2+2x+3$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$ (Μονάδες 6)

α) Η εξίσωση:

$$x^2 + 2x + 3 = \alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - \alpha = 0 \quad (1)$$

έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - \alpha) = \\ = 4 - 12 + 4\alpha = 4\alpha - 8$$

i) Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 8 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha > 8 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

ii) Η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2. \text{ Τότε η διπλή ρίζα είναι: } x = -1$$

β) i) Είναι:

$$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{f(x) - 2} \leq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x) - 2}\right)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) - 2 \leq 4 \Leftrightarrow f(x) \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	+	○	- ○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών .

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. να

αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$ (Μονάδες 6)

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2\end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2 + 1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Επειδή είναι $S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 0$ για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι θετικές.

δ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt{x_1 x_2} &\leq \frac{x_1 + x_2}{2} \stackrel{(\gamma)}{\Leftrightarrow} \sqrt{1} \leq \frac{\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 \leq \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 2\lambda \leq \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda > 0$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)
- β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)
- γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
- δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1 . (Μονάδες 6)

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2\end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2 + 1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Επειδή είναι $S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 0$ για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι θετικές.

δ) Είναι:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{S}{2} = \frac{\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}}{2} = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}$$

Τότε:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - 1 = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} - 1 = \frac{\lambda^2 + 1 - 2\lambda}{2\lambda} = \frac{(\lambda - 1)^2}{2\lambda} > 0$$

διότι:

$$(\lambda - 1)^2 > 0, \text{ για κάθε } \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda > 0 \text{ από υπόθεση}$$

Τελικά:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} > 1$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

(α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .

(i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$2x^2 - \lambda x - 36 = 0$$

(Μονάδες 7)

(ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

(Μονάδες 4+6=10)

i) Το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 36$ έχει $\alpha = 2, \beta = \lambda, \gamma = -36$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \lambda^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36) = \lambda^2 + 288$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\Delta = \lambda^2 + 288 > 0$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) ισχύει ότι:

$$2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0 \quad (2)$$

ii) α) Ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$ αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$2(-\rho)^2 - \lambda(-\rho) - 36 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0,$$

που ισχύει λόγω της σχέσης (2).

β) • Έστω ότι $\rho = 0$. Τότε:

$$(2) \Leftrightarrow 2 \cdot 0^2 + \lambda \cdot 0 - 36 = 0 \Leftrightarrow -36 = 0, \text{ άτοπο}$$

Άρα $\rho \neq 0$.

• Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$ αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$-36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow -36\frac{1}{\rho^2} + \lambda\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -36 + \lambda\rho + 2\rho^2 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0$$

που ισχύει λόγω της σχέσης (2).

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

α) Έχουμε την εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Αν θέσουμε όπου $x^2 = u$ με $u \geq 0$.

Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $u^2 - 8u - 9 = 0$.

Έχουμε $\alpha=1$, $\beta=-8$ και $\gamma=-9$ οπότε Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 64 + 36 = 100$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$u_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{8+\sqrt{100}}{2} = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ δεκτή} \\ \frac{8-\sqrt{100}}{2} = \frac{8-10}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ απορρίπτεται} \end{array} \right\}$$

Όμως έχουμε $x^2 = u \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$

β) Για την εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, αν θέσουμε όπου $x^2 = u$ με $u \geq 0$, η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$u^2 + \beta u + \gamma = 0 \quad (1).$$

i. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$, με:

$$\beta^2 \geq 0 \text{ και}$$

$$\gamma < 0 \quad \text{άρα} \quad -\gamma > 0.$$

Συνεπώς $\Delta > 0$ ως άθροισμα ενός μη αρνητικού και ενός θετικού αριθμού.

ii. Από τους τύπους Vieta το γινόμενο των ριζών της (1) είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma < 0$. Άρα

οι ρίζες $u_{1,2}$ είναι ετερόσημες. Έστω $\left\{ \begin{array}{l} u_1 < 0 \text{ απορρίπτεται} \\ u_2 > 0 \text{ δεκτή} \end{array} \right\}$

Τότε έχουμε $x^2 = u_2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{u_2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{u_2}$

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34 \text{ cm}$ και διαγώνιο $\delta = 13 \text{ cm}$

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60 \text{ cm}^2$. (Μονάδες 5)

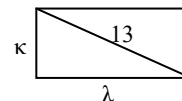
ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm . (Μονάδες 10)

α) i) Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Pi &= 34 \Leftrightarrow 2\kappa + 2\lambda = 34 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \kappa + \lambda &= 17 \Leftrightarrow \kappa = 17 - \lambda \quad (1) \end{aligned}$$



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \kappa^2 + \lambda^2 &= 13^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (17 - \lambda)^2 + \lambda^2 = 169 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 289 - 34\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 &= 169 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 34\lambda + 120 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 17\lambda + 60 &= 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 289 - 240 = 49 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{17+7}{2} = 12 \\ \frac{17-7}{2} = 5 \end{cases}$$

• Για $\lambda = 12$ από τη σχέση (1) βρίσκουμε $\kappa = 5$.

• Για $\lambda = 5$ από τη σχέση (1) βρίσκουμε $\kappa = 12$.

Σε κάθε περίπτωση το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = \kappa \cdot \lambda = 5 \cdot 12 = 60 \text{ cm}^2$$

ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \kappa + \lambda = 17 \quad \text{και} \quad P = \kappa \cdot \lambda = 60$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 17x + 60 = 0$$

iii) Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι 5 cm και 12 cm.

β) Έστω ότι υπάρχει ορθογώνιο με μήκη πλευρών α και β . Τότε πρέπει:

$$E_0 = 40 \Leftrightarrow \alpha\beta = 40 \quad (2)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 64 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 80 = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 = 144 \stackrel{\alpha, \beta > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 12$$

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τα μήκη α και β είναι η:

$$x^2 - 12x + 40 = 0$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta_0 = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 144 - 160 = -16 < 0$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει ορθογώνιο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm .

ΘΕΜΑ 4

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ; (Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; (Μονάδες 5)

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(Μονάδες 10)

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10 \cdot x$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

(Μονάδες 5)

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο που δίνεται $x = 400$ και βρίσκουμε:

$$y = 60 + 0,20 \cdot 400 = 140 \text{ ευρώ}$$

β) Αντικαθιστούμε στον τύπο που δίνεται $y = 150$ και βρίσκουμε:

$$150 = 60 + 0,20 \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = 0,20x \Leftrightarrow x = 450 \text{ km}$$

γ) Η εταιρία Α χρεώνει λιγότερα από την εταιρία Β αν και μόνο αν:

$$60 + 0,20x < 80 + 0,10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,20x - 0,10x < 80 - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,10x < 20 \Leftrightarrow x < 200 \text{ km}$$

Συνεπώς η εταιρία Α χρεώνει λιγότερα από την Β αν ο πελάτης διανύσει λιγότερα από 200 km. Με τον ίδιο συλλογισμό συμπεραίνουμε ότι η εταιρία Β χρεώνει λιγότερα από την Α αν ο πελάτης διανύσει περισσότερα από 200 km.

δ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$ και η g το $B = [0, +\infty)$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0,20x = 80 + 0,10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,20x - 0,10x = 80 - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,10x = 20 \Leftrightarrow x = 200$$

Για $x = 200$ είναι $f(200) = 60 + 0,20 \cdot 200 = 60 + 40 = 100$

Άρα το σημείο τομής είναι το $A(200, 100)$.

Το σημείο τομής εκφράζει ότι αν ο πελάτης διανύσει 200 km θα πληρώσει είτε στην εταιρία Α είτε στη Β το ποσό των 100 ευρώ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1) και $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2) .

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2 + bx + \gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x , να έχει θετική τιμή.

(Μονάδες 10)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

β) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x^2 = y$ (3). Τότε:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$$

Η εξίσωση που προέκυψε είναι ίδια με το σκέλος (α) οπότε έχει ρίζες τις $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

- Για $y = 1$ η σχέση (3) δίνει:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 1)$$

- Για $y = 2$ η σχέση (3) δίνει:

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow (x = -\sqrt{2} \text{ ή } x = \sqrt{2})$$

γ) Επειδή το ζητούμενο τριώνυμο έχει $\alpha = 1 > 0$ το πρόσημο του θα είναι αυτό που δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x^2 + \beta x + \gamma$	+	○	○	+

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του με $x_1 < x_2$ και $x_1, x_2 \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$

Για να είναι $x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x < 0$ πρέπει οι ρίζες του x_1, x_2 να είναι θετικές αφού είναι $0 < x_1 < x_2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Οι ρίζες να είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = \sqrt{2}$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{2} \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$$

2^η περίπτωση

Οι ρίζες να είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = 1$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

3^η περίπτωση

Οι ρίζες να είναι $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_2 = \sqrt{2}$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ και}$$

$$P = x_1x_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = (x - \sqrt{2})^2$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \theta x + \theta^2$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β) i) Αν $\theta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\theta = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\theta + \theta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, θ που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = -3\beta^2$$

β) i) Για $\beta \neq 0$ ισχύει ότι:

$$\Delta = -3\beta^2 < 0$$

Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$ το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Για $\beta = 0$ είναι $\Delta = 0$, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ αφού για $x = 0$ μηδενίζεται.

γ) Θέτουμε στο αρχικό τριώνυμο $x = \alpha$ και βρίσκουμε:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1^η

Αν $\beta \neq 0$ τότε από το σκέλος (αii) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

Περίπτωση 2^η

Αν $\beta = 0$ (οπότε $\alpha \neq 0$) τότε από το σκέλος (βii) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0,$$

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

(Μονάδες 15)

α) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x^2 = y$, ($y \geq 0$) (1). Τότε:

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 9x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 9y + 20 = 0$$

Η νέα εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1$ και ρίζες:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{9+1}{2} = 5 \\ \frac{9-1}{2} = 4 \end{cases}$$

- Για $y = 5$ η σχέση (1) δίνει:

$$x^2 = 5 \Leftrightarrow (x = -\sqrt{5} \text{ ή } x = \sqrt{5})$$

- Για $y = 4$ η σχέση (1) δίνει:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 2)$$

Τελικά, η εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

β) Θέτουμε $x^2 = \omega$, ($\omega \geq 0$) οπότε η εξίσωση που θα κατασκευάσουμε θα είναι της μορφής:

$$\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$$

Επειδή θέλουμε να έχει μια θετική και μια αρνητική θεωρούμε για παράδειγμα τις $\omega_1 = -1$ και $\omega_2 = 4$. Με τη χρήση των τύπων Vieta βρίσκουμε:

$$S = \omega_1 + \omega_2 = -1 + 4 = 3 \text{ και}$$

$$P = \omega_1\omega_2 = (-1) \cdot 4 = -4$$

Τότε η εξίσωση είναι η:

$$\omega^2 - S\omega + P = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega - 4 = 0$$

και η αντίστοιχη διτετράγωνη, θέτοντας $x^2 = \omega$ είναι:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\omega^2 - 3\omega - 4 = 0 \Leftrightarrow (\omega = -1 \text{ ή } \omega = 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = -1, \text{ αδύνατη ή } x^2 = 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 2)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x
(Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 7)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 8$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 4)$$

$$x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow (x < -2 \text{ ή } x > 4) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$$

β) Ισχύει ότι:

$$\kappa = -\frac{8889}{4444} = -\frac{8888+1}{4444} = -\left(\frac{8888}{4444} + \frac{1}{4444}\right) = -2 - \frac{1}{4444} < -2$$

Από τον πίνακα προσήμων του σκέλους (i) διαπιστώνουμε ότι για $\kappa < -2$ είναι:

$$\kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$$

γ) Η δοθείσα παράσταση γράφεται:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8$$

Επομένως προκύπτει από το αρχικό τριώνυμο θέτοντας $x = |\mu|$.

Από το δεδομένο $-4 < \mu < 4$ συμπεραίνουμε ότι:

$$-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4 \Leftrightarrow 0 \leq |\mu| < 4$$

Από τον πίνακα προσήμων του σκέλους (α) διαπιστώνουμε ότι για $0 \leq |\mu| < 4$ είναι:

$$|\mu|^2 - 2|\mu| - 8 < 0$$

ΘΕΜΑ 4

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

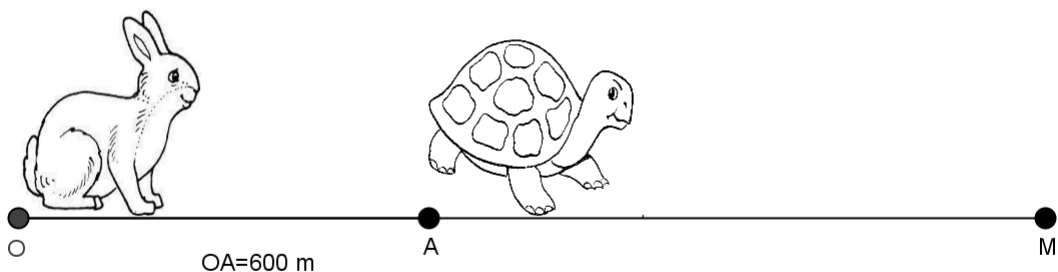
- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM > 600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με $OA = 600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t \geq 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{\lambda}(t) = 10 t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{\chi}(t) = 600 + 40t$ μέτρα.

α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (Μονάδες 10)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM = 2250$ μέτρα. Να βρείτε:

- Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα. (Μονάδες 5)
- Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12$ min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση. (Μονάδες 5)
- Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα. (Μονάδες 5)



α) Το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα θα πρέπει να βρίσκεται σε οποιαδήποτε θέση για την οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} S_X(t) &> S_A(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 600 + 40t &> 10t^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 &< 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 16 + 240 = 256 > 0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{4+16}{2} = 10 \\ \frac{4-16}{2} = -6 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t	$-\infty$	-6	10	$+\infty$
$t^2 - 4t - 60$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$t^2 - 4t - 60 < 0 \Leftrightarrow -6 < t < 10 \Leftrightarrow t \in (-6, 10)$$

Επειδή όμως είναι $t \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι:

$$t \in [0, 10)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} 0 \leq t < 10 &\Leftrightarrow 0 \leq 40t < 400 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 600 + 0 &\leq 600 + 40t < 600 + 400 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 600 &\leq S_A(t) < 1000 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Άρα, το Μ μπορεί να απέχει λιγότερο από 1000 μέτρα από το σημείο Ο και η χελώνα θα έχει διαρκώς προβάδισμα.

β) i) Ο λαγός φτάνει τη χελώνα τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} S_X(t) &= S_A(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 600 + 40t &= 10t^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 &= 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow t &= 10 \text{ min} \end{aligned}$$

ii) Είναι:

$$S_A(12) = 10 \cdot 12^2 = 10 \cdot 144 = 1440 \text{ μέτρα}$$

$$S_X(12) = 600 + 40 \cdot 12 = 600 + 480 = 1080 \text{ μέτρα}$$

Επομένως ο λαγός προηγείται της χελώνας και η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$1440 - 1080 = 360 \text{ μέτρα}$$

iii) Αναζητούμε τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$$S_A(t) = 2250 \Leftrightarrow 10t^2 = 2250 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 225 \Leftrightarrow t^2 = 15^2 \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow t = 15 \text{ min}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 12)

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow (x-1 < -2 \text{ ή } x-1 > 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 3) \end{aligned}$$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 > 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $|x-1| \geq 0$ και $2 > 0$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Θέτουμε $|x-1| = y$ (2) οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$$y^2 - y - 6 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην ισότητα (2) και βρίσκουμε:

- $|x-1| = 3 \Leftrightarrow (x-1 = -3 \text{ ή } x-1 = 3) \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 4)$
- $|x-1| = -2$, αδύνατη.

Αντικαθιστούμε $x = -2$ στον τύπο της συνάρτησης g και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} g(-2) &= |-2-1| + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(-2) = |-3| + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(-2) = 5 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε $x = 4$ στον τύπο της συνάρτησης g και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} g(4) &= |4-1| + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(4) = |3| + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(4) = 5 \end{aligned}$$

Τελικά τα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες:

$A(-2, 5)$ και $B(4, 5)$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

(ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = \lambda - 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 3) = 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda$$

β) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda > -48 \Leftrightarrow \lambda < 12$$

γ) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda-3}{1} = \lambda - 3$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι άνισες και θετικές αν και μόνο αν:

$$(\Delta > 0, S > 0 \text{ και } P > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (48 - 4\lambda > 0, 6 > 0 \text{ και } \lambda - 3 > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda < 12 \text{ και } \lambda > 3) \Leftrightarrow 3 < \lambda < 12, \text{ ισχύει}$$

ii) Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$ το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών x_1, x_2 και αρνητικό εντός των ριζών.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x^2 - 6x + \lambda - 3$	+	○	○	+

- Επειδή $x_1 < \mu < x_2$ είναι:

$$\mu > 0, \text{ αφού } x_1, x_2 > 0$$

και από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι:

$$f(\mu) < 0$$

- Επίσης, αφού $x_1 > 0$ θα πρέπει το 0 να είναι αριστερά του x_1 , όπως φαίνεται στον πίνακα προσήμων. Επειδή $\kappa < 0$ από τον πίνακα προσήμων διαπιστώνουμε ότι:

$$f(\kappa) > 0$$

Τελικά, είναι $\kappa < 0, \mu > 0, f(\kappa) > 0, f(\mu) < 0$, οπότε:

$$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$$

ΘΕΜΑ 4

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$ (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$ (Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x . (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18 \quad (\text{Μονάδες 7})$$

α) i) Το τριώνυμο $x^2 + 9x + 18$ έχει $\alpha = 1, \beta = 9, \gamma = 18$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-9+3}{2} = -3 \\ \frac{-9-3}{2} = -6 \end{cases}$$

ii) Επειδή $|x + 3| \geq 0$ και $|x^2 + 9x + 18| \geq 0$ ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x + 3| = 0 \text{ και } |x^2 + 9x + 18| = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 3 = 0 \text{ και } x^2 + 9x + 18 = 0) \stackrel{(ai)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 \text{ και } x = -3 \text{ ή } x = -6) \Leftrightarrow x = -3$$

β) i) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-6	-3	$+\infty$
$x^2 + 9x + 18$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 9x + 18 < 0 \Leftrightarrow -6 < x < -3 \Leftrightarrow x \in (-6, -3)$$

$$x^2 + 9x + 18 > 0 \Leftrightarrow (x < -6 \text{ ή } x > -3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (-3, +\infty)$$

ii) Είναι:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^2 + 9x + 18| = -(x^2 + 9x + 18) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x + 18 < 0 \stackrel{(βii)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -6 < x < -3 \Leftrightarrow x \in (-6, -3)$$

ΘΕΜΑ 4

Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε n ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του n , δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

α) Το πλήθος των μαθητών είναι:

$$x(x-1) \quad \text{ή} \quad (x+3)(x-3)-1$$

Πρέπει:

$$x(x-1) = (x+3)(x-3)-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = x^2 - 9 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x = -9 - 1 \Leftrightarrow x = 10$$

β) Αντικαθιστούμε στον τύπο $x(x-1)$ όπου $x = 10$ και βρίσκουμε:

$$10(10-1) = 10 \cdot 9 = 90 \text{ μαθητές}$$

γ) Το πλήθος των μαθητών στις ομάδες εργασίας αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με

$a_1 = 2$, $\omega = 2$ και $S_v = 90$. Τότε:

$$S_v = \frac{v}{2}[2a_1 + (v-1)\omega] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = \frac{v}{2}[2 \cdot 2 + (v-1)2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = \frac{v}{2}(4 + 2v - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = 2v + v^2 - v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 + v - 90 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 1 + 360 = 361 > 0$$

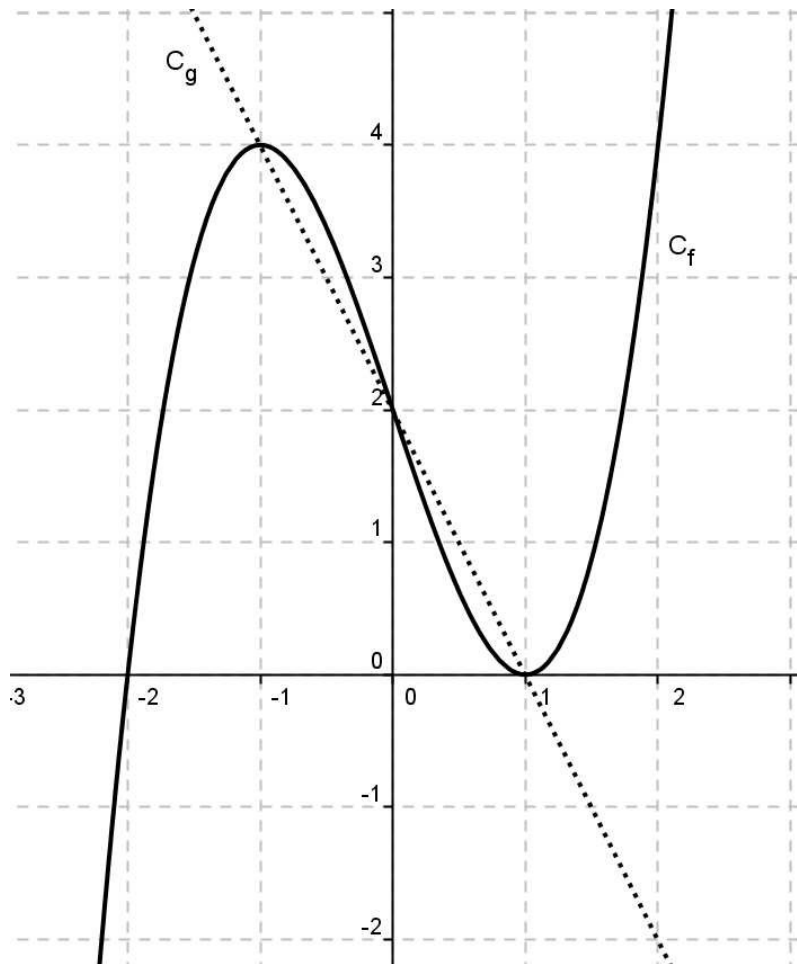
και ρίζες τις:

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{-1+19}{2} = 9 \\ \frac{-1-19}{2} = -10 \end{cases}$$

Η τιμή $v = -10$ απορρίπτεται διότι $v \in \mathbb{N}$. Άρα θα δημιουργηθούν $v = 9$ ομάδες εργασίας.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

- α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$. (Μονάδες 6)
- β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. (Μονάδες 6)
- γ) Τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 6)
- δ) Τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 7)

α) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

είναι τα σημεία τομής των C_f , C_g . Από τη γραφική παράσταση των f , g διαπιστώνουμε ότι τα ζητούμενα x είναι τα:

$$x_1 = -1, x_2 = 0, \text{ και } x_3 = 1$$

β) Από τη γραφική παράσταση της f διαπιστώνουμε ότι:

$$f(-1) = 4, f(0) = 2 \text{ και } f(1) = 0$$

γ) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν:

$$x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

δ) Η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$f(x) + 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Από τις γραφικές παραστάσεις των f και g διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω ανίσωση ισχύει αν και μόνο αν:

$$x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0. \quad (\text{Μονάδες 9})$$

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$.

(Μονάδες 9)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5\lambda x - 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5\lambda$, $\gamma = -1$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 25\lambda^2 + 4$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\Delta = 25\lambda^2 + 4 > 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5\lambda}{1} = 5\lambda \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$$

i) Τότε:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5\lambda)^2 - 18 - 7(-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

ii) Για $\lambda = 1$ είναι:

$$S = x_1 + x_2 = 5 \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = -1$$

Τότε:

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2 &= \\ &= x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 = \\ &= -1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -16 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \lambda \in (0, 4).$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16;

Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)}{1} = 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$$

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\begin{aligned}\Pi &= 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = \\ &= 2 \cdot 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

ii) Το εμβαδόν είναι:

$$E = x_1 x_2 = 16$$

Είναι:

$$\begin{aligned}\Pi \geq 16 &\Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

β) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\Pi = 16 &\Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1\end{aligned}$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 16 = 0 &\Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4\end{aligned}$$

Δηλαδή η εξίσωση έχει διπλή ρίζα το οποίο σημαίνει ότι $x_1 = x_2 = 4$ κι επομένως το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0 \quad \text{με } \lambda \in (0, 2)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$ (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

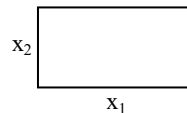
α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda(2-\lambda)}{1} = \lambda(2-\lambda)$$

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 2 = 4$$



ii) Το εμβαδόν E του ορθογωνίου είναι:

$$E = x_1 x_2 = \lambda(2-\lambda)$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} E \leq 1 &\Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} E = 1 &\Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $x_1 = x_2 = 1$ οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $a \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{5+7}{2} = 6 \\ \frac{5-7}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	6	$+\infty$	
x^2-5x-6	+	o	-	o	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 6 \Leftrightarrow x \in (-1, 6)$$

Ο αριθμός Κ προκύπτει με αντικατάσταση στο τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ όπου $x = -\frac{46}{47}$.

Ο αριθμός $-\frac{46}{47}$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 6)$ όπου η παράσταση Κ είναι αρνητική. Άρα:

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6 < 0$$

iii) Η παράσταση:

$$\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6 = |\alpha|^2 - 5|\alpha| - 6$$

προκύπτει με αντικατάσταση στο τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ όπου $x = |\alpha|$. Ισχύει ότι:

$$\alpha \in (-6, 6) \Leftrightarrow -6 < \alpha < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| < 6 \Leftrightarrow 0 \leq |\alpha| < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| \in [0, 6) \subset (-1, 6)$$

Στο διάστημα αυτό, όπως διαπιστώνουμε από τον πίνακα προσήμων, το τριώνυμο είναι αρνητικό, άρα:

$$\Lambda < 0$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \quad x \in (0, 10). \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι

παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ; (Μονάδες 8)

α) Ισχύει ότι:

$$x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \quad (1)$$

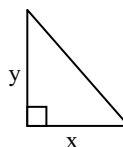
Πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Τότε:

$$y > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10$$

Άρα $0 < x < 10 \Leftrightarrow x \in (0, 10)$.

Το εμβαδόν ενός τριγώνου με μήκη πλευρών x και y υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{2}xy \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = \frac{1}{2}x(10 - x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2), x \in (0, 10) \end{aligned}$$



β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} E(x) &\leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10x - x^2 \leq 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 5)^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in (0, 10) \end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10x - x^2 = 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Επομένως για $x = 5$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Για $x = 5$ η σχέση (1) δίνει: $y = 10 - 5 = 5$. Στην περίπτωση αυτή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

- α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. (Μονάδες 3)

x (km)	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

- ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. (Μονάδες 3)

x (km)			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

- β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x), g(x)$. (Μονάδες 8)

- γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

- δ) Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον B , να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B . (Μονάδες 3)

α) i) • Για απόσταση $x = 0$ km, δηλαδή μόλις ο πελάτης μπει στο ταξί, η χρέωση είναι 1 ευρώ.

• Για απόσταση $x = 2$ km, ο πελάτης θα πληρώσει $2 \cdot 0,6 = 1,2$ ευρώ και την είσοδο στο ταξί 1 ευρώ. Άρα, συνολικά θα πληρώσει 2,2 ευρώ.

• Για απόσταση $x = 8$ km, ο πελάτης θα πληρώσει $8 \cdot 0,6 = 4,8$ ευρώ και την είσοδο στο ταξί 1 ευρώ. Άρα, συνολικά θα πληρώσει 5,8 ευρώ.

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii) • Αφού ο πελάτης πλήρωσε 2 ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο στο ταξί αυτό σημαίνει ότι ο πελάτης απλά μπήκε στο ταξί χωρίς να διανύσει χιλιόμετρα. Άρα $x = 0$ km.

• Αφού ο πελάτης πλήρωσε 3,2 ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο στο ταξί αυτό σημαίνει ότι πλήρωσε $3,2 - 2 = 1,2$ ευρώ για τα χιλιόμετρα που διάνυσε. Επειδή εταιρεία χρεώνει 0,4 ευρώ το χιλιόμετρο ο πελάτης διάνυσε $1,2 : 0,4 = 3$ χιλιόμετρα.

• Αφού ο πελάτης πλήρωσε 4,8 ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο στο ταξί αυτό σημαίνει ότι πλήρωσε $4,8 - 2 = 2,8$ ευρώ για τα χιλιόμετρα που διάνυσε. Επειδή εταιρεία χρεώνει 0,4 ευρώ το χιλιόμετρο ο πελάτης διάνυσε $2,8 : 0,4 = 7$ χιλιόμετρα.

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

x (km)	0	3	7
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Επειδή οι τιμές που αναγράφονται στο πρόβλημα ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα ισχύει ότι το πεδίο ορισμού είναι:

$$A_f = A_g = [0, 15)$$

Προσδιορισμός της f

Ο πελάτης πληρώνει 0,6 ευρώ αν διανύσει 1 χιλιόμετρο. Αν διανύσει x χιλιόμετρα θα πληρώσει $0,6 \cdot x$ ευρώ. Επιπλέον με την είσοδό του στο ταξί θα πληρώσει 1 ευρώ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = 1 + 0,6x, \quad x \in [0, 15)$$

Προσδιορισμός της g

Ο πελάτης πληρώνει 0,4 ευρώ αν διανύσει 1 χιλιόμετρο. Αν διανύσει x χιλιόμετρα θα πληρώσει $0,4 \cdot x$ ευρώ. Επιπλέον με την είσοδό του στο ταξί θα πληρώσει 2 ευρώ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο τύπος της g είναι:

$$g(x) = 2 + 0,4x, \quad x \in [0, 15)$$

γ) Αντικαθιστούμε στον τύπο της f :

- $x = 0$ και βρίσκουμε $f(0) = 1 + 0,6 \cdot 0 = 1$
- $x = 5$ και βρίσκουμε $f(5) = 1 + 0,6 \cdot 5 = 4$

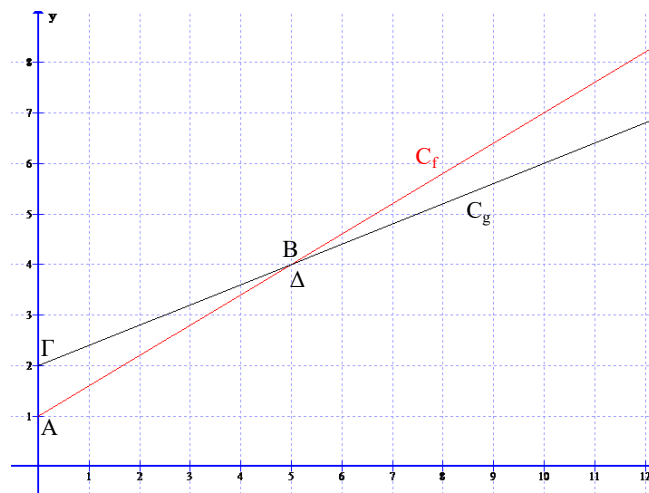
Άρα η γραφική παράσταση της f που είναι μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(5, 4)$.

Αντικαθιστούμε στον τύπο της g :

- $x = 0$ και βρίσκουμε $g(0) = 2 + 0,4 \cdot 0 = 2$
- $x = 5$ και βρίσκουμε $g(5) = 2 + 0,4 \cdot 5 = 4$

Άρα η γραφική παράσταση της g που είναι μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0, 2)$ και $\Delta(5, 4)$.

Οι γραφικές παραστάσεις των f, g είναι:



Η εταιρεία RED είναι οικονομικότερη από τη YELLOW για το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . Από τη γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει στο διάστημα $[0, 5)$.

δ) Αν ο πελάτης B διανύσει x χιλιόμετρα τότε ο πελάτης A θα διανύσει $x + 3$ χιλιόμετρα.

Επομένως ο πελάτης B θα πληρώσει:

$$B = 1 + 0,6x$$

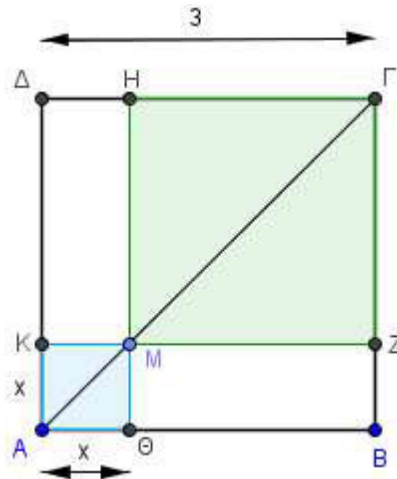
και ο πελάτης A θα πληρώσει:

$$A = 1 + 0,6(x + 3) = 1 + 0,6x + 0,6 \cdot 3 = B + 1,8$$

Τελικά ο πελάτης A θα πληρώσει 1,8 ευρώ περισσότερα από τον πελάτη B.

ΘΕΜΑ 4

Στο επόμενο σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB=3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0, 3)$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια θέση του M πάνω στην $ΑΓ$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

α) Είναι:

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{ΑΘΜΚ}} + E_{\text{ΜΖΓΗ}} = \text{ΑΘ}^2 + \text{ΓΗ}^2 = \\ &= x^2 + (3 - x)^2 = \\ &= x^2 + 9 - 6x + x^2 = \\ &= 2x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} E &\geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 \geq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x - 3)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x \in (0, 3)$

γ) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E &= \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 = 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Για $x = \frac{3}{2}$ το σημείο Θ είναι μέσο του ΑΒ, οπότε και το Μ μέσο του ΑΓ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α , β και εμβαδόν E , τέτοια ώστε οι αριθμοί α , E , β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $E=1$ (Μονάδες 10)

β) Αν $\alpha + \beta = 10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη α , β (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη α , β (Μονάδες 10)

α) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α και β έχει εμβαδόν $E = \alpha\beta$ (1).

Οι αριθμοί α , E , β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$E^2 = \alpha\beta \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E^2 = E \stackrel{E \neq 0}{\Leftrightarrow} E = 1$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \alpha + \beta = 10 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \alpha\beta = 1$$

Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β είναι η:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0 \quad (2)$$

ii) Τα α , β είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2). Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 96$$

και ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{96}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{16 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} \frac{10+4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6} \\ \frac{10-4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Άρα τα μήκη είναι $5 + 2\sqrt{6}$ και $5 - 2\sqrt{6}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8$ με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

γ) Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \dots$ και (β_n) είναι η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \dots$ τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) . (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του n ώστε, για το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) να

ισχύει: $2(S_n + 24) = \theta_7$ (Μονάδες 8)

α) Οι αριθμοί 2, x, 8 με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x = \frac{2+8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = 5$$

Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = x - 2 = 5 - 2 = 3$$

β) Οι αριθμοί 2, x, 8 με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 4$$

Ο λόγος λ της προόδου είναι:

$$\lambda = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2$$

γ) i) Η αριθμητική πρόοδος (a_n) έχει $a_1 = 2$ και $\omega = 3$. Τότε:

$$S_v = \frac{v}{2}[2a_1 + (v-1)\omega] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_v = \frac{v}{2}[2 \cdot 2 + (v-1)3] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_v = \frac{v}{2}(4 + 3v - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_v = \frac{v}{2}(1 + 3v) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_v = \frac{v+3v^2}{2}$$

ii) Η γεωμετρική πρόοδος (β_n) έχει $\beta_1 = 2$ και $\lambda = 2$. Είναι:

$$\beta_7 = \beta_1 \lambda^{7-1} = 2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$$

Τότε:

$$2(S_v + 24) = \beta_7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{v+3v^2}{2} + 24\right) = 128 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3v^2 + v + 48 = 128 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3v^2 + v - 80 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-80) = 1 + 960 = 961 > 0$$

και ρίζες τις

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{961}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 31}{6} = \begin{cases} \frac{-1+31}{6} = 5 \\ \frac{-1-31}{6} = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

Η λύση $v = -\frac{16}{3}$ απορρίπτεται διότι δεν είναι φυσικός αριθμός. Τελικά $v = 5$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες.

Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \quad (1)$$

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να

αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 7$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = \lambda - 7$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 7) = 36 - 4\lambda + 28 = 64 - 4\lambda$$

Το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 64 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda \geq -64 \Leftrightarrow \lambda \leq 16$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 7}{1} = \lambda - 7$$

ii) Το τριώνυμο έχει δύο άνισες και ομόσημες ρίζες αν και μόνο αν:

$$(\Delta > 0 \quad \text{και} \quad P > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (64 - 4\lambda > 0 \quad \text{και} \quad \lambda - 7 > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4\lambda > -64 \quad \text{και} \quad \lambda > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda < 16 \quad \text{και} \quad \lambda > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 < \lambda < 16$$

Επειδή $S = 6 > 0$, οι ρίζες είναι θετικές.

γ) i) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \Leftrightarrow |x|^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε στη (2) $|x| = y$ και έχουμε:

$$y^2 - 6y + \lambda - 7 = 0 \quad (3)$$

Επομένως για να έχει η εξίσωση (2) τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες αρκεί η εξίσωση (3) να έχει δύο θετικές άνισες μεταξύ τους πραγματικές ρίζες. Από το σκέλος (iiβ) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$7 < \lambda < 16$$

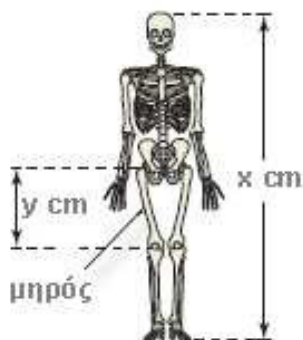
ii) Ισχύει ότι:

$$7 < 3\sqrt{10} < 16 \Leftrightarrow \sqrt{49} < \sqrt{90} < \sqrt{256}, \text{ το οποίο ισχύει}$$

Τελικά για $\lambda = 3\sqrt{10}$ η εξίσωση (2) οπότε και η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 4

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $38,5\text{cm}$ που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164cm . Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42,8\text{cm}$ που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο $y = 0,43x - 26$ όπου $y = 38,5$ και βρίσκουμε:

$$38,5 = 0,43x - 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64,5 = 0,43x \Leftrightarrow x = 150$$

Άρα η γυναίκα έχει ύψος 150 cm.

β) Αν υποθέσουμε ότι το μηριαίο οστό με μήκος $y = 42,8$ cm ανήκει σε άνθρωπο με ύψος $x = 164$ cm, τότε θα πρέπει να επαληθεύεται η ισότητα $y = 0,45x - 31$.

Είναι:

$$42,8 = 0,45 \cdot 164 - 31 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 42,8 = 73,8 - 31 \Leftrightarrow 42,8 = 42,8, \text{ ισχύει}$$

γ) Ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους αν και μόνο αν:

$$0,43x - 26 = 0,45x - 31 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31 - 26 = 0,45x - 0,43x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,02x = 5 \Leftrightarrow x = 250 \text{ cm}$$

Είναι φυσικώς αδύνατον ένας άνδρας και μια γυναίκα να έχουν ύψος 250 cm! Δεν μπορεί επομένως ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί : $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x . (Μονάδες 6)

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4^{ος} όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

α) Οι αριθμοί $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} x^2 + x &= \frac{x^2 + 5 + 2x + 4}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(x^2 + x) &= x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2x &= x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 9 \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ή } x = 3) \end{aligned}$$

β) Για $x = 3$ είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= 3^2 + 5 = 14 \text{ και} \\ \alpha_5 &= 3^2 + 3 = 12 . \end{aligned}$$

i) Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 12 - 14 = -2$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (4 - 1)\omega = 14 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 + 3(-2) &= 14 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 - 6 &= 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20 \end{aligned}$$

iii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$\begin{aligned} S &= \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24} = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \dots + \alpha_{24} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{14}) = \\ &= S_{24} - S_{14} = \\ &= \frac{24}{2}[2 \cdot 20 + (24 - 1) \cdot (-2)] - \frac{14}{2}[2 \cdot 20 + (14 - 1) \cdot (-2)] = \\ &= 12(40 - 46) - 7(40 - 26) = -72 - 98 = -170 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , ο 3^{ος} όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8^{ος} όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον 31^ο όρο της. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \dots + (\alpha_{31} + 31) \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

α) Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha_3 = 8 &\Leftrightarrow \alpha_1 + (3 - 1)\omega = 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8 - 2\omega \quad (1)\end{aligned}$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\alpha_8 = 23 &\Leftrightarrow \alpha_1 + (8 - 1)\omega = 23 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega = 23 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 8 - 2\omega + 7\omega = 23 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = 8 - 2 \cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha_{31} &= \alpha_1 + (31 - 1)\omega = \\ &= 2 + 30 \cdot 3 = 2 + 90 = 92\end{aligned}$$

γ) Έχουμε:

$$\begin{aligned}S &= (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \dots + (\alpha_{31} + 31) = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{31}) + (1 + 2 + 3 + \dots + 31) = S_1 + S_2\end{aligned}$$

όπου

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{31} = \frac{31}{2}[2 \cdot 2 + (31 - 1) \cdot 3] = \frac{31}{2}(4 + 30 \cdot 3) = \frac{31}{2} \cdot 94 = 1457$$

$$S_2 = 1 + 2 + 3 + \dots + 31 = \frac{31}{2}(1 + 31) = \frac{31}{2} \cdot 32 = 496$$

Τελικά:

$$S = 1457 + 496 = 1953$$

ΘΕΜΑ 4

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A , s_B , s_Γ , και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_A < s_B$$
$$s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4} \quad \text{και}$$

$$|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο O και τα σημεία A, B, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A , s_B σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις

$$s_A + s_B = 1,4 \quad \text{και} \quad s_A \cdot s_B = 0,45 \quad \text{τότε:}$$

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A , s_B

(Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A , s_B , s_Γ , και s_Δ .

(Μονάδες 7)

α) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 |s_{\Delta} - s_A| &= |s_{\Delta} - s_B| \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (s_{\Delta} - s_A &= s_{\Delta} - s_B \text{ ή } s_{\Delta} - s_A = -(s_{\Delta} - s_B)) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (s_A &= s_B, \text{ απορρίπτεται } \text{ ή } s_{\Delta} - s_A = -s_{\Delta} + s_B) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2s_{\Delta} &= s_A + s_B \Leftrightarrow s_{\Delta} = \frac{s_A + s_B}{2}
 \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
 s_A - s_{\Delta} &= s_A - \frac{s_A + s_B}{2} = \\
 &= \frac{2s_A - s_A - s_B}{2} = \frac{s_A - s_B}{2} < 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow s_A &< s_{\Delta} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ισχύει επίσης ότι:

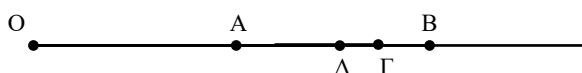
$$\begin{aligned}
 s_{\Delta} - s_{\Gamma} &= \frac{s_A + s_B}{2} - \frac{s_A + 3s_B}{4} = \\
 &= \frac{2s_A + 2s_B - s_A - 3s_B}{4} = \frac{s_A - s_B}{4} < 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow s_{\Delta} &< s_{\Gamma} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
 s_{\Gamma} - s_B &= \frac{s_A + 3s_B}{4} - s_B = \\
 &= \frac{s_A + 3s_B - 4s_B}{4} = \frac{s_A - s_B}{4} < 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow s_{\Gamma} &< s_B \quad (3)
 \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) βρίσκουμε:

$$s_A < s_{\Delta} < s_{\Gamma} < s_B$$



β) i) Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού είναι η:

$$\begin{aligned}
 x^2 - Sx + P &= 0 \Leftrightarrow x^2 - (s_A + s_B)x + s_A s_B = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2 - 1,4x + 0,45 &= 0 \quad (4)
 \end{aligned}$$

ii) Η εξίσωση (4) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1,4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,45 = 0,16$$

και ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1,4) \pm \sqrt{0,16}}{2 \cdot 1} = \frac{1,4 \pm 0,4}{2} = \begin{cases} \frac{1,4+0,4}{2} = 0,9 \\ \frac{1,4-0,4}{2} = 0,5 \end{cases}$$

Επειδή ισχύει $s_A < s_B$ είναι:

$$s_A = 0,5 \text{ km} \text{ και } s_B = 0,9 \text{ km}$$

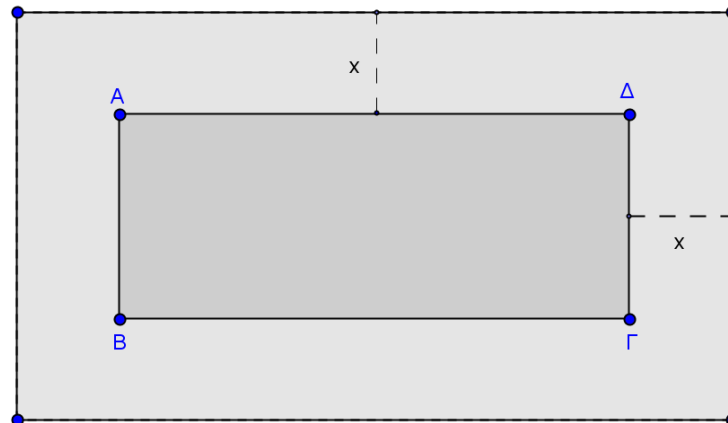
Τέλος βρίσκουμε:

$$s_{\Gamma} = \frac{s_A + 3s_B}{4} = \frac{0,5 + 3 \cdot 0,9}{4} = 0,8 \text{ km}$$

$$s_{\Delta} = \frac{s_A + s_B}{2} = \frac{0,5 + 0,9}{2} = 0,7 \text{ km}$$

ΘΕΜΑ 4

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις $15m$ και $25m$. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος $x\ m$ ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x, \quad x > 0 \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\ m^2$. (Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\ m^2$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι:

$$E_1 = 15 \cdot 25 = 375 \text{ m}^2$$

Το εξωτερικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις $15 + 2x$, $25 + 2x$ και εμβαδόν:

$$\begin{aligned} E_2 &= (15 + 2x)(25 + 2x) = \\ &= 375 + 30x + 50x + 4x^2 = \\ &= 4x^2 + 80x + 375 \end{aligned}$$

Το εμβαδόν της ζώνης είναι:

$$\begin{aligned} E &= E_2 - E_1 = \\ &= 4x^2 + 80x + 375 - 375 = \\ &= 4x^2 + 80x, x > 0 \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E &= 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x = 500 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 = 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125) = 400 + 500 = 900 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{-20+30}{2} = 5 \\ \frac{-20-30}{2} = -25 \end{cases}$$

Επειδή $x > 0$ είναι $x = 5 \text{ m}$.

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} E(x) &< 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x < 500 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 < 0 \end{aligned}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
$x^2 + 20x - 125$				

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned} x^2 + 20x - 125 &< 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (0, 5) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40\text{cm}$. Αν $x\text{ cm}$ είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. (Μονάδες 4)

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x)=20x-x^2. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. (Μονάδες 6)

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm .

(Μονάδες 7)

α) Έστω ότι το πλάτος του παραλληλογράμμου είναι y cm. Τότε η περίμετρός του είναι:

$$\Pi = 2x + 2y$$

Είναι:

$$\Pi = 40 \Leftrightarrow 2x + 2y = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 20 - x \quad (1)$$

Επειδή τα x, y είναι διαστάσεις πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Τότε:

$$y > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 20 - x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x > -20 \Leftrightarrow x < 20$$

Τελικά:

$$0 < x < 20$$

β) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι:

$$E = x \cdot y \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = x(20 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(x) = 20x - x^2, \quad x \in (0, 20)$$

γ) Είναι:

$$E(x) \leq 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 \leq 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 10x + 10^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 10)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) Από το ερώτημα (γ) η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι 100 cm^2 . Άρα:

$$E(x) = 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow (x - 10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

και $y = 20 - 10 = 10$. Άρα από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 40 cm το τετράγωνο με πλευρά 10 cm έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_n) , τέτοιοι

ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. (Μονάδες 9)

α) Είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_3 = 10 &\Leftrightarrow \alpha_1 + (3 - 1)\omega = 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 2\omega \quad (1) \end{aligned}$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\begin{aligned} \alpha_{20} = 61 &\Leftrightarrow \alpha_1 + (20 - 1)\omega = 61 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 10 - 2\omega + 19\omega = 61 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 17\omega = 51 \Leftrightarrow \omega = 3 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_v = 333 &\Leftrightarrow \alpha_1 + (v - 1)\omega = 333 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 + (v - 1)3 = 333 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 + 3v - 3 = 333 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3v = 332 \Leftrightarrow v = \frac{332}{3} \end{aligned}$$

Ο αριθμός $\frac{332}{3}$ δεν είναι φυσικός και επομένως ο 333 δεν μπορεί να είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

γ) Έστω ότι οι x, y είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $x < y$. Τότε ισχύει ότι:

$$y = \omega + x \quad (2)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2} = \frac{\omega + x}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = 2(\omega + x) \Leftrightarrow 3x = 2\omega + 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2\omega \Leftrightarrow x = 6 \end{aligned}$$

Ο αριθμός 6 δεν είναι όρος της αριθμητικής προόδου αφού θα έπρεπε να υπάρχει φυσικός αριθμός v ώστε να ισχύει:

$$\alpha_v = 6 \Leftrightarrow 4 + (v - 1)3 = 6 \Leftrightarrow 3v = 5 \Leftrightarrow v = \frac{5}{3}, \text{ που δεν είναι φυσικός αριθμός.}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2|, \text{ τότε:}$$

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.

(Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ .

(Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2x + \lambda$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = 4 - 4\lambda$$

Η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda > -4 \Leftrightarrow \lambda < 1$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad (1)$$

γ) i) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2 = x_2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -(x_2 + 2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -x_2 - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 4 \text{ ή } x_1 + x_2 = 0, \text{ απορρίπτεται λόγω του } (\beta)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4 \quad (2)$$

ii) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$x_1 + x_2 + x_1 - x_2 = 2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 3$$

Αντικαθιστούμε στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$3 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

Επίσης, από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (-1) = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \lambda = -3$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|p_1 - p_2| = 2$.

(Μονάδες 10)

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha$ είναι:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\alpha^2 - 1))^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (-\alpha) = \\ &= \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2\end{aligned}$$

β) Είναι $\Delta > 0$ οπότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-(\alpha^2 - 1)) \pm \sqrt{(\alpha^2 + 1)^2}}{2 \cdot \alpha} = \frac{\alpha^2 - 1 \pm (\alpha^2 + 1)}{2\alpha} = \begin{cases} \frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + 1}{2\alpha} = \alpha \\ \frac{\alpha^2 - 1 - \alpha^2 - 1}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned}|\rho_1 - \rho_2| &= 2 \Leftrightarrow \left| \alpha - \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \right| = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} = -2 \quad \text{ή} \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha^2 + 1 = -2\alpha \quad \text{ή} \quad \alpha^2 + 1 = 2\alpha) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((\alpha + 1)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad (\alpha - 1)^2 = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha - 1 = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha = -1 \quad \text{ή} \quad \alpha = 1)\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει v τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

α) Το μηνιαίο κόστος της επιχείρησης, αν γεμίζει v τόներ είναι:

$$K(v) = 6500 + 15 \cdot v, v \in \mathbb{N}$$

β) Τα μηνιαία έσοδα της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού τόνων είναι:

$$E(v) = 25 \cdot v, v \in \mathbb{N}$$

γ)

i) Η επιχείρηση δεν έχει ζημία αν και μόνο αν:

$$E(v) \geq K(v) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25v \geq 6500 + 15v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10v \geq 6500 \Leftrightarrow v \geq 650$$

Επομένως η επιχείρηση πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 650 τόνα το μήνα ώστε να μην έχει ζημιά.

ii) Το κέρδος της επιχείρησης προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$P(v) = E(v) - K(v) =$$

$$= 25v - 6500 - 15v =$$

$$= 10v - 6500.$$

Η επιχείρηση έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ αν και μόνο αν:

$$P(v) \geq 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10v - 6500 \geq 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10v \geq 7000 \Leftrightarrow v \geq 700$$

Επομένως η επιχείρηση έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ αν πουλήσει τουλάχιστον 700 τόνα.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ανίσωση: $|x + 1| < 4$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

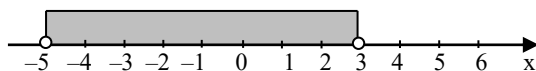
γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \leq 0$. (Μονάδες 15)

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|x + 1| < 4 &\Leftrightarrow -4 < x + 1 < 4 \Leftrightarrow -4 - 1 < x + 1 - 1 < 4 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -5 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-5, 3)\end{aligned}$$



β) Οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) που ανήκουν στο διάστημα $(-5, 3)$ είναι οι:

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με μορφή $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, το οποίο έχει δύο ρίζες και για το οποίο να ισχύει:

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \leq 0$$

και ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Αν το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 τότε ο πίνακας προσήμων του είναι ο εξής:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x^2 + \beta x + \gamma$	+			+

Επειδή θέλουμε το τριώνυμο να είναι θετικό, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ πρέπει το διάστημα αυτό να είναι εκτός των ριζών x_1, x_2 . Αυτό με άλλα λόγια σημαίνει ότι οι ρίζες δεν πρέπει να ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Επομένως οι ρίζες θα είναι οι αριθμοί 1 και 2.

Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3 \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = 1 \cdot 2 = 2$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 3x + 2$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

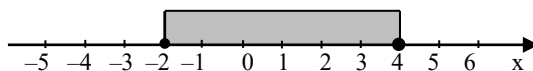
γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$. (Μονάδες 15)

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|x - 1| \leq 3 &\Leftrightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -3 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 3 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]\end{aligned}$$



β) Οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) που ανήκουν στο διάστημα $[-2, 4]$ είναι οι:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με μορφή $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, το οποίο έχει δύο ρίζες και για το οποίο να ισχύει:

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \geq 0$$

και ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 τότε ο πίνακας προσήμων του είναι ο εξής:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x^2 + \beta x + \gamma$	+	○	○	+

Επειδή θέλουμε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ πρέπει το διάστημα αυτό να είναι εκτός των ριζών x_1, x_2 . Αυτό με άλλα λόγια σημαίνει ότι οι ρίζες δεν πρέπει να ανήκουν στο διάστημα $[0, +\infty)$. Επομένως οι ρίζες θα είναι οι αριθμοί -2 και -1 .

Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -2 + (-1) = -3 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = (-2) \cdot (-1) = 2$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 + 3x + 2.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x .

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002)$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$$

(Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x + 3$ έχει $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$-x^2 + 2x + 8$	-	○	+	○	-

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$-x^2 + 2x + 8 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

$$-x^2 + 2x + 8 < 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

β) Ο αριθμός 2,999 ανήκει στο διάστημα $(-1, 3)$ όπου το τριώνυμο είναι θετικό. Άρα:

$$f(2,999) > 0$$

Ο αριθμός $-1,002$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$ όπου το τριώνυμο είναι αρνητικό. Άρα:

$$f(-1,002) < 0$$

Επομένως είναι:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002) < 0$$

γ) Ο αριθμός $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3$ προκύπτει αν στον τύπο της f θέσουμε $x = |\alpha|$.

Είναι δηλαδή:

$$f(|\alpha|) = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3 = -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$$

Επειδή είναι:

$$-3 < \alpha < 3 \Leftrightarrow |\alpha| < 3 \Leftrightarrow 0 \leq |\alpha| < 3$$

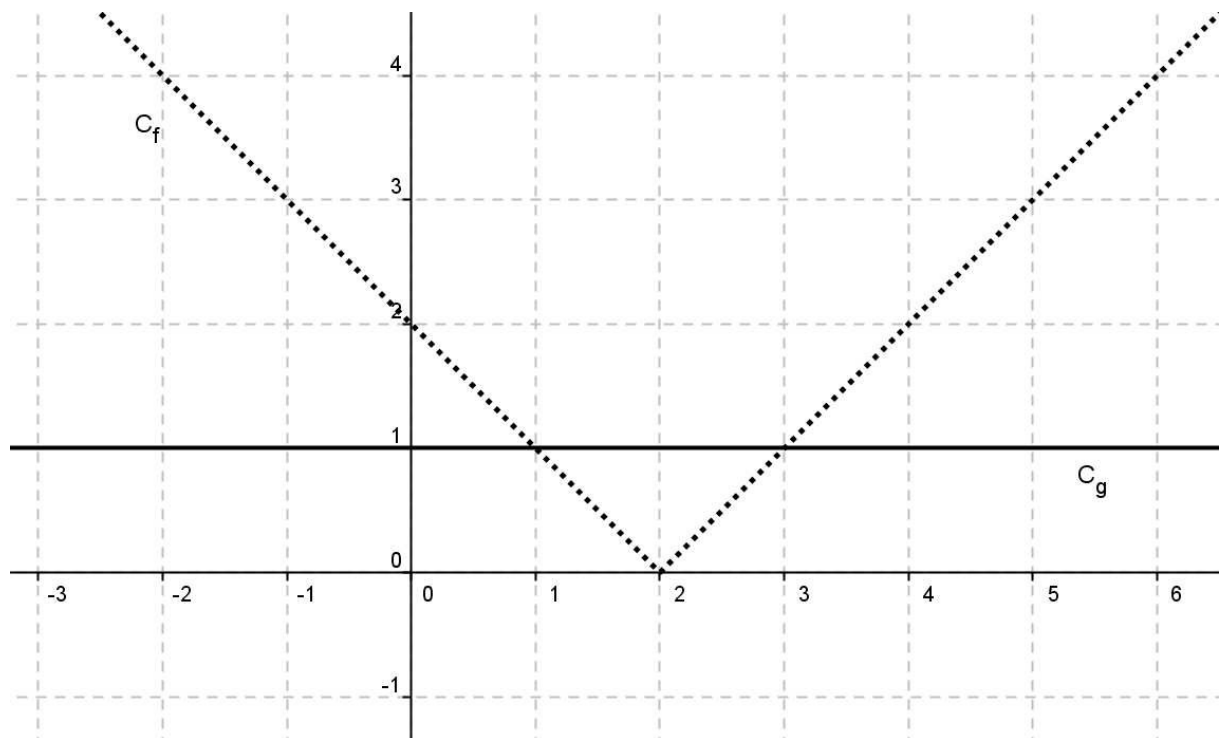
ο αριθμός $|\alpha|$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 3)$ όπου η f είναι θετική. Άρα:

$$f(|\alpha|) > 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 > 0$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x)=|x-2| \quad \text{και} \quad g(x)=1, \quad x \in \mathbb{R}$$



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g .

(Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$

(Μονάδες 5)

α) i) Από τη γραφική παράσταση που δίνεται εκτιμούμε ότι τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A_1(1, 1)$ και $A_2(3, 1)$.

ii) Η C_f είναι κάτω από τη C_g στο διάστημα $(1, 3)$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x - 2| = 1 \Leftrightarrow (x - 2 = 1 \text{ ή } x - 2 = -1) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = 1)$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = |1 - 2| = 1$ και για $x = 3$ είναι $f(3) = |3 - 2| = 1$

Άρα τα σημεία τομής τους είναι τα $A_1(1, 1)$ και $A_2(3, 1)$.

Επίσης, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, άρα η C_f είναι κάτω από τη C_g στο διάστημα $(1, 3)$.

γ) Η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$(1 - f(x) \geq 0 \text{ και } f(x) \neq 0) \Leftrightarrow (f(x) \leq 1 \text{ και } f(x) \neq 0)$$

Αναζητούμε επομένως τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g , τα σημεία τομής της f με την g καθώς και τα σημεία στα οποία η f τέμνει τον άξονα $x'x$ ώστε να τα απορρίψουμε. Από τη δοθείσα γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν:

$$x \in [1, 2) \cup (2, 3]$$

Σχόλιο

Το σκέλος (γ) θα μπορούσε να λυθεί αλγεβρικά ως εξής:

$$(f(x) \leq 1 \text{ και } f(x) \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x - 2| \leq 1 \text{ και } |x - 2| \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1 \leq x - 2 \leq 1 \text{ και } x - 2 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 \leq x \leq 3 \text{ και } x \neq 2) \Leftrightarrow x \in [1, 2) \cup (2, 3]$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β . (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά (Μονάδες 12)

α) Επειδή $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$, θα ισχύει:

$$(\alpha - 1 > 0 \text{ και } 1 - \beta > 0) \text{ ή } (\alpha - 1 < 0 \text{ και } 1 - \beta < 0)$$

1^η περίπτωση

$$\alpha - 1 > 0 \text{ και } 1 - \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \text{ και } 1 > \beta \Leftrightarrow \beta < 1 < \alpha$$

2^η περίπτωση

$$\alpha - 1 < 0 \text{ και } 1 - \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \text{ και } 1 < \beta \Leftrightarrow \alpha < 1 < \beta$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α και β .

β) Αλγεβρικά

- Αν $\beta < 1 < \alpha$, τότε:

$$\begin{cases} \beta < 1 \\ 1 < \alpha \\ \beta < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 1 - \beta \\ 0 < \alpha - 1, \\ \beta - \alpha < 0 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} |\alpha - 1| &= \alpha - 1, \quad |1 - \beta| = 1 - \beta \text{ και} \\ |\beta - \alpha| &= 4 \Leftrightarrow -(\beta - \alpha) = 4 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 4 \quad (1) \end{aligned}$$

Η παράσταση K γράφεται:

$$\begin{aligned} K &= |\alpha - 1| + |1 - \beta| = \\ &= \alpha - 1 + 1 - \beta = \alpha - \beta \stackrel{(1)}{=} 4 \end{aligned}$$

- Αν $\alpha < 1 < \beta$, τότε:

$$\begin{cases} \alpha < 1 \\ 1 < \beta \\ \alpha < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 < 0 \\ 1 - \beta < 0, \\ 0 < \beta - \alpha \end{cases}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} |\alpha - 1| &= -(\alpha - 1) = 1 - \alpha, \\ |1 - \beta| &= -(1 - \beta) = \beta - 1 \text{ και} \\ |\beta - \alpha| &= 4 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 4 \quad (2) \end{aligned}$$

Η παράσταση K γράφεται:

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta| = 1 - \alpha + \beta - 1 = \beta - \alpha \stackrel{(2)}{=} 4$$

Γεωμετρικά

Έστω $A(\alpha)$, $B(\beta)$ και $\Gamma(1)$ όπου το Γ βρίσκεται μεταξύ των A και B . Τότε:

$$\begin{aligned} K &= |\alpha - 1| + |1 - \beta| = \\ &= d(\alpha, 1) + d(1, \beta) = \\ &= A\Gamma + \Gamma B = \\ &= AB = d(\alpha, \beta) = \\ &= |\beta - \alpha| = 4 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και (Μονάδες 5)

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). (Μονάδες 10)

α) Το τριώνυμο $3x^2 - 14x + 8$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = -14$, $\gamma = 8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{14+10}{6} = 4 \\ \frac{14-10}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Το τριώνυμο $8x^2 - 14x + 3$ έχει $\alpha = 8$, $\beta = -14$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 196 - 96 = 100 > 0$$

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \frac{14 \pm 10}{16} = \begin{cases} \frac{14+10}{16} = \frac{3}{2} \\ \frac{14-10}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

β) Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο

αν ισχύει:

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \quad (5)$$

i) Έστω ότι $\rho = 0$, τότε:

$$(5) \Leftrightarrow \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$$

άτοπο, αφού $\alpha\gamma \neq 0$. Άρα $\rho \neq 0$.

ii) Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4) αν και μόνο αν:

$$\gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma\frac{1}{\rho^2} + \beta\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \stackrel{\rho \neq 0}{\Leftrightarrow} \gamma + \beta\rho + \alpha\rho^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$$

που ισχύει λόγω της ισότητας (5).

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ . (Μονάδες 8)

ii) Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$ (Μονάδες 7)

α) Η ανίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 \geq 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$2x^2 - 5x + 2$	+	$\circ$	-	$\circ$	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{1}{2} \text{ ή } x \geq 2\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$$

β) i) Επειδή είναι $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$ οι $\kappa - 1$, $\lambda - 1$ είναι ετερόσημοι. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

$$(\lambda - 1 > 0 \text{ και } \kappa - 1 < 0) \Leftrightarrow (\lambda > 1 \text{ και } \kappa < 1) \Leftrightarrow \kappa < 1 < \lambda$$

2^η περίπτωση

$$(\lambda - 1 < 0 \text{ και } \kappa - 1 > 0) \Leftrightarrow (\lambda < 1 \text{ και } \kappa > 1) \Leftrightarrow \lambda < 1 < \kappa$$

Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των κ , λ .

ii) Αφού οι κ , λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ισχύει ότι το 1 είναι μεταξύ των κ , λ , τότε θα είναι:

$$\kappa \leq \frac{1}{2} \text{ και } \lambda \geq 2 \text{ ή } \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ και } \kappa \geq 2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

$$\left(\kappa \leq \frac{1}{2} \text{ και } \lambda \geq 2\right) \Leftrightarrow \left(\kappa \leq \frac{1}{2} \text{ και } -\lambda \leq -2\right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:

$$\kappa - \lambda \leq \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \leq -\frac{3}{2}$$

2^η περίπτωση

$$\left(\lambda \leq \frac{1}{2} \text{ και } \kappa \geq 2\right) \Leftrightarrow \left(-\lambda \geq -\frac{1}{2} \text{ και } \kappa \geq 2\right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:

$$\kappa - \lambda \geq -\frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \geq \frac{3}{2}$$

Τελικά, και από τις δύο περιπτώσεις βρίσκουμε:

$$\left(\kappa - \lambda \leq -\frac{3}{2} \text{ ή } \kappa - \lambda \geq \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow |\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται πραγματικός αριθμός α , που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha - 2| < 1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α .

(Μονάδες 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

(Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0$$

(Μονάδες 7)

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |\alpha - 2| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 + 2 < \alpha - 2 + 2 < 1 + 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3 &\Leftrightarrow \alpha \in (1, 3) \end{aligned}$$

β) i) Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\alpha - 2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \alpha^2 - 4\alpha + 4 - 1 = \alpha^2 - 4\alpha + 3$$

Το τριώνυμο $\alpha^2 - 4\alpha + 3$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

α	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$\alpha^2 - 4\alpha + 3$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0, \text{ για κάθε } \alpha \in (1, 3)$$

ii) Αφού το τριώνυμο $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$ έχει $\Delta < 0$ θα έχει πρόσημο το ίδιο με το πρόσημο του συντελεστή του x^2 , δηλαδή του $1 > 0$. Άρα:

$$x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Σχόλιο

Το σκέλος (βi) μπορεί να λυθεί και ως εξής:

Επειδή $\Delta = [-(\alpha - 2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = (\alpha - 2)^2 - 1$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} 0 < |\alpha - 2| < 1 &\Leftrightarrow 0 < |\alpha - 2|^2 < 1^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 < (\alpha - 2)^2 - 1 < 1 - 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 < \Delta < 0 &\Leftrightarrow \Delta < 0 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4, \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $(\beta_n) = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) . (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_n) και (β_n) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10} \quad (\text{Μονάδες 8})$$

α) Είναι:

$$\alpha_3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{3-1} = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^2 = 4 \quad (1)$$

και

$$\alpha_5 = 16 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{5-1} = 16 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^4 = 16 \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\frac{\alpha_1 \lambda^4}{\alpha_1 \lambda^2} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \lambda = 2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 2^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$$

β) Ισχύει ότι:

$$\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} = \frac{\frac{1}{\alpha_{v+1}}}{\frac{1}{\alpha_v}} = \frac{\alpha_v}{\alpha_{v+1}} = \frac{\alpha_1 \lambda^{v-1}}{\alpha_1 \lambda^{v+1-1}} = \frac{\alpha_1 \lambda^v \lambda^{-1}}{\alpha_1 \lambda^v} = \lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

Επομένως η (β_v) είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 1$ και λόγο $\lambda' = \frac{1}{2}$.

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} S_{10} &= \alpha_1 \frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1} = 1 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = \\ &= 2^{10} - 1 \quad (3) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} S'_{10} &= \beta_1 \frac{(\lambda')^{10}-1}{\lambda'-1} = \\ &= 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2^{10}}-1}{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\frac{1-2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2(2^{10}-1)}{2^{10}} = \\ &= \frac{2^{10}-1}{2^9} = \frac{1}{2^9} (2^{10} - 1) = \\ &= \frac{1}{2^9} S_{10}, \end{aligned}$$

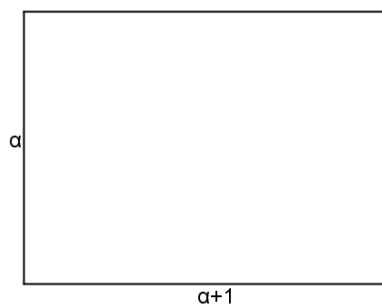
λόγω της (3).

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 6 < 0$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - \frac{1}{2}| > 1$ (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha + 1$



όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $|\alpha - \frac{1}{2}| > 1$. Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

α) Το τριώνυμο $x^2 + x - 6$ έχει $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x^2 + x - 6$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-3, 2)$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{1}{2} \right| > 1 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} < -1 \text{ ή } x - \frac{1}{2} > 1 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x < -1 + \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1 + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ή } x > \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right) \end{aligned}$$

γ) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha, \alpha > 0$$

Τότε:

$$E < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 6 < 0 \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} -3 < \alpha < 2$$

Επειδή όμως είναι $\alpha > 0$ συμπεραίνουμε ότι:

$$0 < \alpha < 2 \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\left| \alpha - \frac{1}{2} \right| > 1 \stackrel{(α)}{\Leftrightarrow} \left(\alpha < -\frac{1}{2} \text{ ή } \alpha > \frac{3}{2} \right) \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha > \frac{3}{2} \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις (1) και (2) καταλήγουμε ότι:

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2$$

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2\alpha + 2(\alpha + 1) = 2\alpha + 2\alpha + 2 = 4\alpha + 2$$

Τότε από το σκέλος (γi) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{3}{2} < 4 \cdot \alpha < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 < 4\alpha < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 + 2 < 4\alpha + 2 < 8 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 < \Pi < 10$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

(Μονάδες 10)

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|x - 4| < 2 &\Leftrightarrow -2 < x - 4 < 2 \Leftrightarrow -2 + 4 < x - 4 + 4 < 2 + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow x \in (2, 6)\end{aligned}$$

β) i) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}d(x, 4) < 2 &\Leftrightarrow |x - 4| < 2 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 3 \cdot x < 3 \cdot 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 - 4 < 3x - 4 < 18 - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14\end{aligned}$$

Άρα $3x - 4 > 0$ (1).

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}2 < d(3x, 4) < 14 &\Leftrightarrow 2 < |3x - 4| < 14 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 14 + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{6}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{18}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 < x < 6,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει από σκέλος (α).

ii) Θέλουμε να βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση:

$$d(3x, 19) = |3x - 19|$$

Από το σκέλος (α) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}2 < x < 6 &\Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 3 \cdot x < 3 \cdot 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 - 19 < 3x - 19 < 18 - 19 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -13 < 3x - 19 < -1 \quad (2)\end{aligned}$$

Άρα $3x - 19 < 0$. Τότε:

$$d(3x, 19) = |3x - 19| = -(3x - 19) = -3x + 19$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης (2) με -1 και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}-13 < 3x - 19 < -1 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -13 \cdot (-1) > (3x - 19) \cdot (-1) > -1 \cdot (-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 13 > -3x + 19 > 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 < -3x + 19 < 13 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 < d(3x, 19) < 13\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.

(Μονάδες 15)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$$

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

β) Επειδή είναι $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$ οι $\alpha^2 - 3\alpha + 2$, $\beta^2 - 3\beta + 2$ είναι ετερόσημοι.

Από την απάντηση του ερωτήματος (α), διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2 > 0 \text{ και } \beta^2 - 3\beta + 2 < 0 \text{ και } \alpha < \beta) \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha < 1 \text{ ή } \alpha > 2 \text{ και } 1 < \beta < 2 \text{ και } \alpha < \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1 < 0 \text{ και } \beta - 2 < 0)$$

Τότε $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0$. Άρα

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

Την περίπτωση $\alpha > 2$ την απορρίπτουμε διότι σε συνδυασμό με την ανίσωση $1 < \beta < 2$ καταλήγουμε ότι $\alpha > \beta$, που είναι άτοπο.

2^η περίπτωση

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2 < 0 \text{ και } \beta^2 - 3\beta + 2 > 0 \text{ και } \alpha < \beta) \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (1 < \alpha < 2 \text{ και } \beta < 1 \text{ ή } \beta > 2 \text{ και } \alpha < \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1 > 0 \text{ και } \beta - 2 > 0)$$

Τότε $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0$. Άρα

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

Την περίπτωση $\beta < 1$ την απορρίπτουμε διότι σε συνδυασμό με την ανίσωση $1 < \alpha < 2$ καταλήγουμε ότι $\alpha > \beta$, που είναι άτοπο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει ότι:

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 8)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

(Μονάδες 5)

α) Πρέπει:

$$|2 - x| \neq 0 \Leftrightarrow 2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

Το τριώνυμο έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Είναι:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{|2 - x|}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Για $x > 2$ είναι: $|2 - x| = -(2 - x) = x - 2$, οπότε η f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = x - 3$$

2^η περίπτωση

Για $x < 2$ είναι: $|2 - x| = 2 - x = -(x - 2)$, οπότε η f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{-(x - 2)} = -(x - 3) = -x + 3$$

Τελικά έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$$

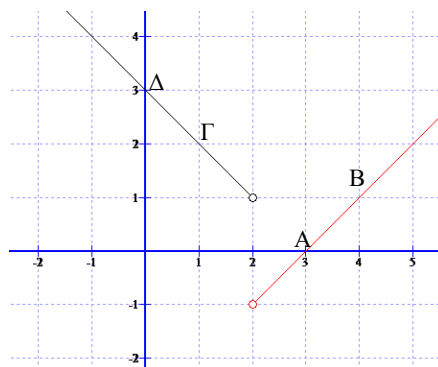
γ) Για $x = 3$ είναι $f(3) = 0$ και για $x = 4$ είναι $f(4) = 1$.

Επομένως η ευθεία $y = x - 3$ διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(4, 1)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 2$ και για $x = 0$ είναι $f(0) = 3$.

Επομένως η ευθεία $y = 3 - x$ διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(1, 2)$ και $\Delta(0, 3)$.

Η γραφική παράσταση της f είναι:



Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = 3) \stackrel{x \neq 2}{\Leftrightarrow} x = 3$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(3, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = \frac{0^2 - 5 \cdot 0 + 6}{|2 - 0|} = \frac{6}{2} = 3$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 3)$.

δ) Αναζητούμε τα x για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «κάτω» από τον άξονα $x'x$ καθώς και τα σημεία τομής της f με τον άξονα $x'x$. Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$x \in (2, 3]$$

Σχόλιο

Προφανώς, τα σημεία τομής με τους άξονες θα μπορούσαμε να τα συμπεράνουμε από τη γραφική παράσταση της f χωρίς να χρειαστεί να λύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 5)

α) Πρέπει:

$$2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha$. Είναι:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha &= \\ &= 4x^2 - 2\alpha x - 6x + 3\alpha = \\ &= 2x(2x - 3) - \alpha(2x - 3) = \\ &= (2x - 3)(2x - \alpha) \end{aligned}$$

Τότε ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3} = \frac{(2\alpha - 3)(2x - \alpha)}{2x - 3} = 2x - \alpha$$

γ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$f(1) = -1 \Leftrightarrow 2 - \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

δ) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x - \alpha = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2}, \text{ με } x \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq 3 \end{aligned}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$, $\alpha \neq 3$.

Αν $\alpha = 3$ η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - \alpha = -\alpha$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -\alpha)$.

ΘΕΜΑ 4

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|\alpha - 2| < 1$
- $|\beta - 3| \leq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.
(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.
(Μονάδες 9)

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |\alpha - 2| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 + 2 < \alpha - 2 + 2 < 1 + 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3 &(1) \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |\beta - 3| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq \beta - 3 \leq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 + 3 \leq \beta - 3 + 3 \leq 2 + 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 \leq \beta \leq 5 &(2) \end{aligned}$$

γ) Από το σκέλος (α) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 1 < \alpha < 3 &\Leftrightarrow 2 \cdot 1 < 2\alpha < 2 \cdot 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 < 2\alpha < 6 &(3) \end{aligned}$$

Από το σκέλος (β) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 1 \leq \beta \leq 5 &\Leftrightarrow -3 \cdot 1 \geq -3\beta \geq -3 \cdot 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 \geq -3\beta \geq -15 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -15 \leq -3\beta \leq -3 &(4) \end{aligned}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 2 - 15 < 2\alpha - 3\beta < 6 - 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -13 < 2\alpha - 3\beta < 3 \end{aligned}$$

δ) Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 1 \leq \beta \leq 5 &\Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1 &(5) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (5) και βρίσκουμε:

$$1 \cdot \frac{1}{5} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 3 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$$

ΘΕΜΑ 4

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|1 - 3\alpha| < 2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού
όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 10)

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |1 - 3\alpha| < 2 &\Leftrightarrow -2 < 1 - 3\alpha < 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 - 1 < -1 + 1 - 3\alpha < -1 + 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 < -3\alpha < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-3}{-3} > \frac{-3\alpha}{-3} > -\frac{1}{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \alpha < 1 &(1) \end{aligned}$$

β) Επειδή η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} d(2, \beta) < 1 &\Leftrightarrow |\beta - 2| < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 < \beta - 2 < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 + 2 < \beta - 2 + 2 < 1 + 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 < \beta < 3 &(2) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης (1) με -3 και βρίσκουμε:

$$-\frac{1}{3} < \alpha < 1 \Leftrightarrow 1 > -3\alpha > -3 \Leftrightarrow -3 < -3\alpha < 1 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (2) και (3) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 1 - 3 < \beta - 3\alpha < 3 + 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 < \beta - 3\alpha < 4 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 - 1 < \beta - 3\alpha - 1 < 4 - 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 < \beta - 3\alpha - 1 < 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\beta - 3\alpha - 1| < 3 \end{aligned}$$

γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2 \geq 0, \quad (4) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Το τριώνυμο $4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2$ έχει συντελεστή του x^2 τον αριθμό $4 > 0$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-4(\beta - 2)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot \beta^2 = \\ &= 16(\beta^2 - 4\beta + 4) - 16\beta^2 = \\ &= 16\beta^2 - 64\beta + 64 - 16\beta^2 = \\ &= 64 - 64\beta \end{aligned}$$

Η ανίσωση (4) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\Leftrightarrow 64 - 64\beta < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -64\beta < -64 &\Leftrightarrow \beta > 1, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει λόγω της ανίσωσης (2).