

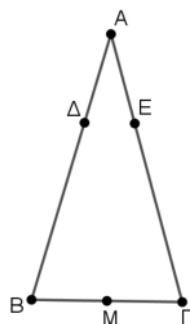
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές $AB, A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD=\frac{1}{3}AB$ και $AE=\frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα BD και GE είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα BDM και $ME\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

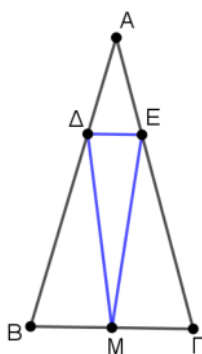
γ) το τρίγωνο DEM είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



α) Επειδή $AB = ΑΓ$ και $ΑΔ = ΑΕ$, έχουμε ότι:

$$ΒΔ = AB - ΑΔ = ΑΓ - ΑΕ = ΓΕ$$

β) Φέρνουμε αρχικά τα $ΔΜ$ και $ΕΜ$.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΜΕΓ$, τα οποία έχουν:

- $ΒΔ = ΓΕ$, από το α)
- $ΒΜ = ΜΓ$, γιατί το $Μ$ είναι μέσο της $ΒΓ$ και
- $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΜΕΓ$ είναι ίσα.

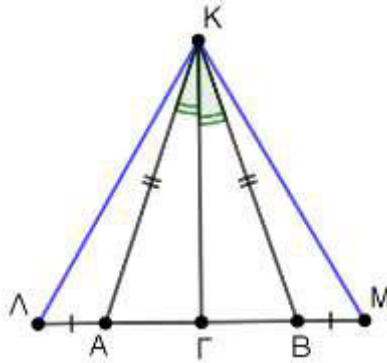
γ) Τα τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΜΕΓ$ είναι ίσα, από το β) και άρα ισχύει $ΜΕ = ΜΔ$ (καθώς βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$). Συνεπώς, το τρίγωνο $ΜΔΕ$ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA=KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $A\Lambda=BM$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές (Μονάδες 12)

β) η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$ (Μονάδες 13)



Είναι $\widehat{B\Lambda K} = \widehat{A\Gamma K}$ ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου KAB.

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα KAL και KBM, το οποία έχουν:

- $KA = KB$, από την υπόθεση
- $\widehat{K\Lambda L} = \widehat{K\Gamma M}$, γιατί $\widehat{K\Lambda L} = 180^\circ - \widehat{B\Lambda K} = 180^\circ - \widehat{A\Gamma K} = \widehat{K\Gamma M}$
- $AL = BM$, από υπόθεση.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα KAL και KBM είναι ίσα. Οπότε ισχύει $KL = KM$ (είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{K\Lambda L}$ και $\widehat{K\Gamma M}$). Άρα το τρίγωνο KLM είναι ισοσκελές.

β) Η KG είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου KAB που αντιστοιχεί στη γωνία της κορυφής, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου KAB. Επομένως $AG = BG$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $AL = BM$.

Άρα, $GL = AL + AG = BM + BG = GM$.

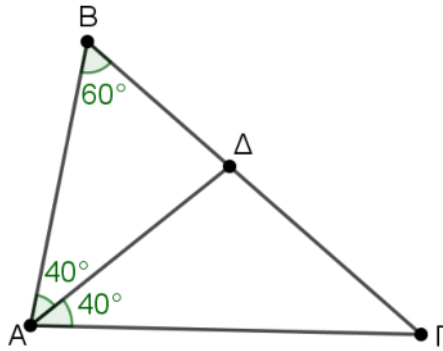
Συνεπώς, το Γ είναι μέσο της LM και επομένως η KG είναι διάμεσος του KLM.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Φέρουμε από το D ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A\Delta E}$, $\hat{E\Delta \Gamma}$. (Μονάδες 13)



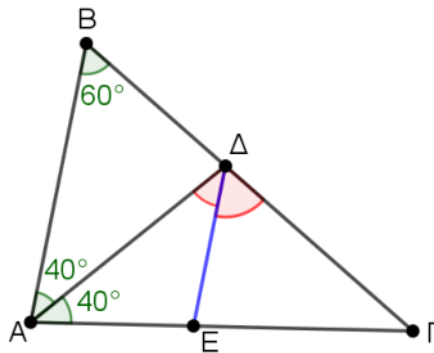
α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} = 80^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 40^\circ$$

Άρα $\widehat{B} = 20^\circ + \widehat{\Gamma} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

β) Η AΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, άρα ισχύει ότι $\widehat{B\Delta A} = \widehat{G\Delta A} = \frac{\widehat{A}}{2} = 40^\circ$.

Φέρνουμε την ΔΕ // AB.



Είναι $\widehat{E\Delta A} = \widehat{B\Delta A} = 40^\circ$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, AB που τέμνονται από την AΔ. Επίσης $\widehat{E\Delta \Gamma} = \widehat{B} = 60^\circ$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, AB που τέμνονται από την BΔ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA=B\Gamma$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

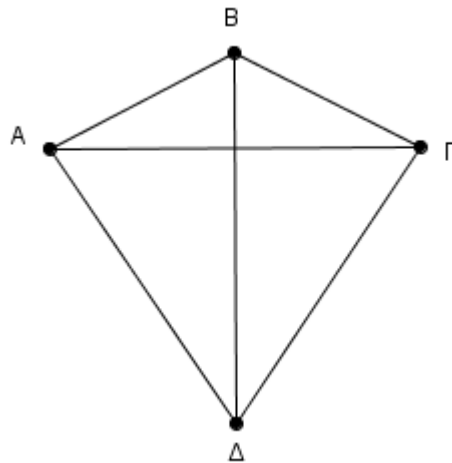
Να αποδείξετε ότι:

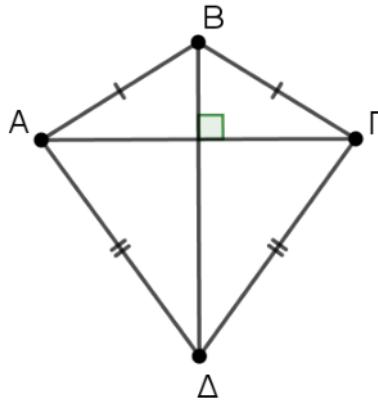
α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 13)





α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ έχουν:

- $BA = B\Gamma$, από την υπόθεση
- $\Delta A = \Delta\Gamma$, από την υπόθεση
- $B\Delta$ κοινή πλευρά.

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ίσα, οπότε έχουν $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές $A\Delta$ και $\Delta\Gamma$) και $\widehat{A\hat{\Delta}B} = \widehat{B\hat{\Delta}\Gamma}$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές AB και $B\Gamma$). Άρα η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{A\hat{B}\Delta}$ και $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$.

β) Είναι $BA = B\Gamma$, άρα το σημείο B έχει την ίδια απόσταση από τα A και Γ (δηλαδή τα άκρα του $A\Gamma$). Παρόμοια, $\Delta A = \Delta\Gamma$, άρα το σημείο Δ έχει την ίδια απόσταση από τα A και Γ (δηλαδή τα άκρα του $A\Gamma$). Επομένως προκύπτει ότι τα B και Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $A\Gamma$. Οπότε η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $A\Gamma$, εφόσον δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EZ = AE = AZ$.

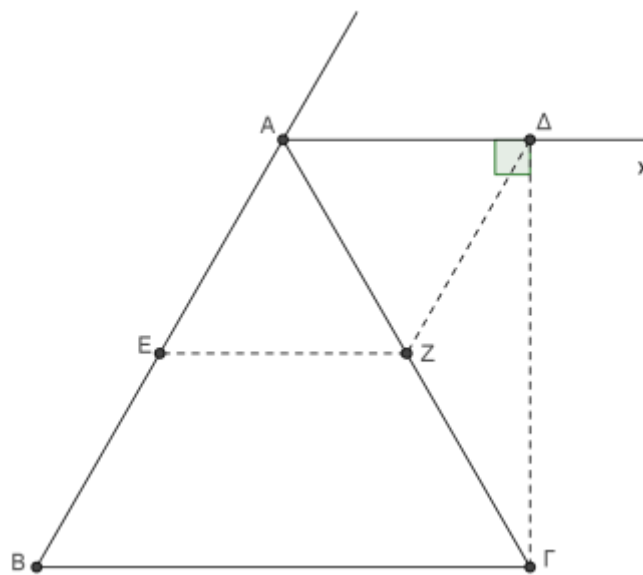
(Μονάδες 9)

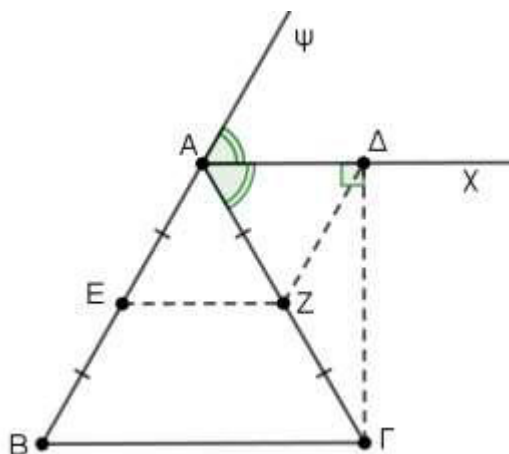
β) Η γωνία $\hat{A\Gamma\Delta} = 30^\circ$.

(Μονάδες 10)

γ) Τα τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 6)





α) Το EZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, άρα $EZ = \frac{B\Gamma}{2}$.

Επίσης, το E είναι μέσο του AB και το Z είναι μέσο του AG, άρα ισχύουν $AZ = \frac{AG}{2}$ και

$$AE = \frac{AB}{2}.$$

Λόγω του ισοπλεύρου ABΓ, ισχύει ότι $B\Gamma = AB = AG$. Άρα $EZ = AE = AZ$.

β) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, άρα για τις γωνίες του ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$

Επίσης ισχύει ότι $\psi\hat{A}\Gamma = 180^\circ - \hat{A} = 120^\circ$.

Η Αχ είναι διχοτόμος της γωνίας και άρα $\Delta\hat{A}Z = \frac{\psi\hat{A}\Gamma}{2} = 60^\circ$.

Επίσης, η γωνία ΑΓΔ του ορθογώνιου τριγώνου ΑΔΓ είναι:

$$A\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - \Delta\hat{A}Z - 90^\circ = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

γ) Στο ίδιο ορθογώνιο τρίγωνο, η ΔΖ είναι διάμεσος της υποτείνουσας ΑΓ και $A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$. Άρα $\Delta Z = AZ = A\Delta$.

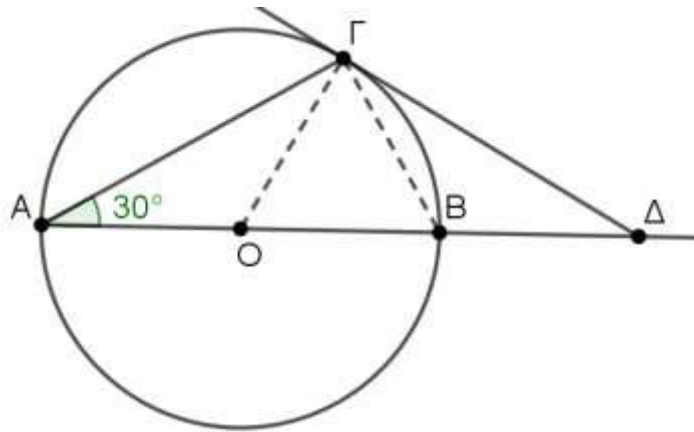
Επιπλέον, από το α) έχουμε ότι $EZ = AE = AZ$, άρα για το τετράπλευρο ΑΔΖΕ ισχύει ότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες, καθώς $A\Delta = \Delta Z = EZ = AE$, επομένως είναι ρόμβος.

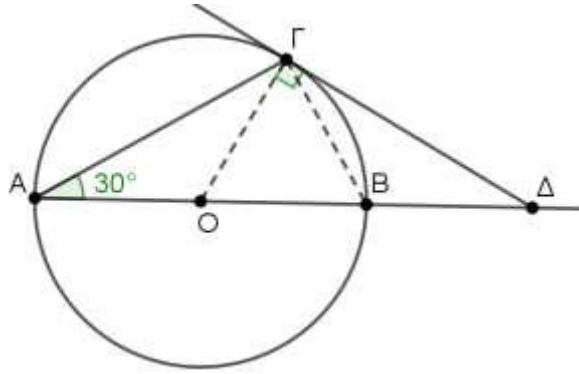
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB , και χορδή AG τέτοια ώστε $\hat{BAG} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $O\Gamma\Delta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)





α) Η εφαπτομένη ΓΔ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΓ, άρα $\widehat{O\Gamma\Delta} = 90^\circ$. Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta}$ και η επίκεντρη $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα:

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2} \Leftrightarrow 30^\circ = \frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \widehat{B\hat{O}\Gamma} = 60^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΓΔ έχουμε:

$$\widehat{O\Gamma\Delta} + \widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} + \widehat{O\hat{\Delta}\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \widehat{O\hat{\Delta}\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{O\hat{\Delta}\Gamma} = 30^\circ$$

β) Η γωνία $\widehat{B\hat{\Gamma}\Delta}$ είναι γωνία μεταξύ χορδής ΒΓ και εφαπτομένης ΓΔ του κύκλου, άρα είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής ΒΓ του κύκλου, δηλαδή με την $\widehat{A} = 30^\circ$. Άρα $\widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = 30^\circ$.

Επίσης, από το α) $\widehat{O\hat{\Delta}\Gamma} = 30^\circ$, δηλαδή $\widehat{B\hat{\Delta}\Gamma} = 30^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΒΓΔ έχει δύο ίσες γωνίες, επομένως είναι ισοσκελές.

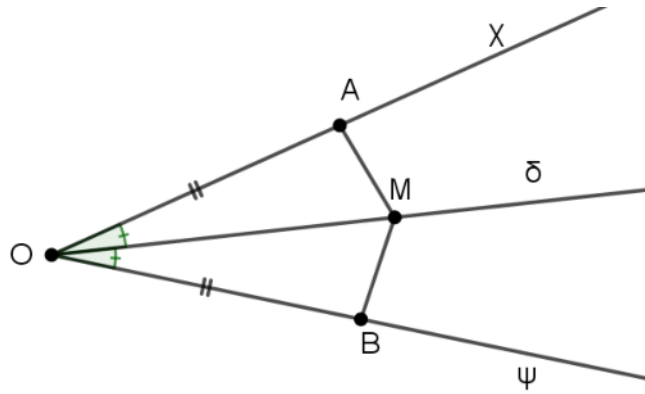
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $\widehat{\alpha\beta}$ και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οα και Οβ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA=OB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $MA=MB$. (Μονάδες 15)

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMB}$. (Μονάδες 10)



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα BMO και AMO, τα οποία έχουν:

- OM κοινή πλευρά
- $OA = OB$ και
- $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ γιατί η Oδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{XO\Psi}$.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα BMO και AMO είναι ίσα οπότε, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{AOM}$ και $\widehat{BOM}$ βρίσκονται οι ίσες πλευρές $MA = MB$.

β) Επειδή τα τρίγωνα BMO και AMO είναι ίσα, έχουν και $\widehat{OMA} = \widehat{OMB}$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές OA και OB), άρα η Oδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMB}$.

ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ καθέτους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα.

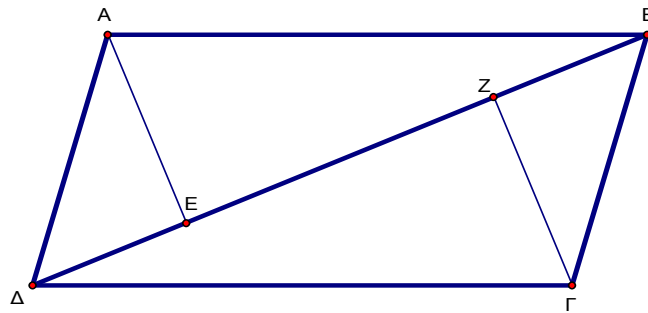
Να αποδείξετε ότι:

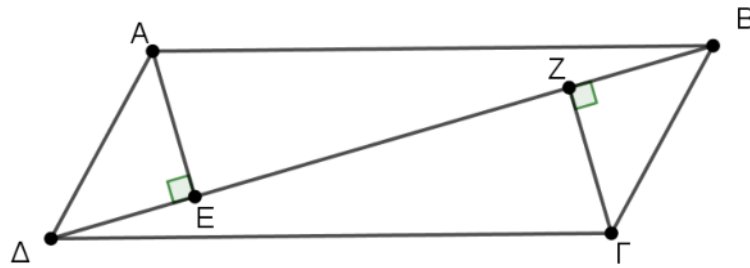
α) $AE = \Gamma Z$.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)





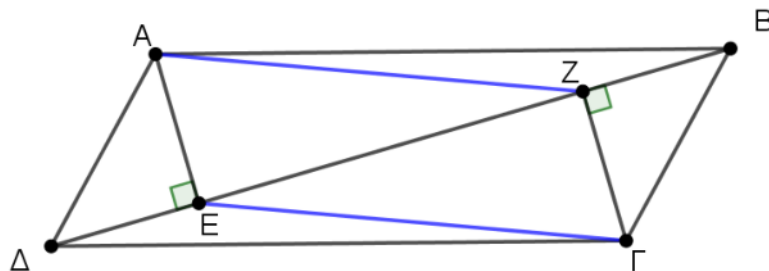
α) Συγκρίνουμε τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle GBZ$:

- Είναι ορθογώνια
- $AD = BG$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- $\widehat{ADE} = \widehat{GBZ}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AD, BG που τέμνονται από την BD .

Άρα πρόκειται για ορθογώνια τρίγωνα με δύο οξείες γωνίες ίσες μία προς μία και τις υποτείνουσές τους ίσες, επομένως είναι ίσα.

Από την ισότητα των τριγώνων $\triangle ADE$ και $\triangle GBZ$ προκύπτει ότι $AE = GZ$ (γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{ADE}$ και $\widehat{GBZ}$).

β) Φέρνουμε τις EG και AZ .



Οι AE και GZ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ($AE \perp BD$ και $GZ \perp BD$), άρα $AE \parallel GZ$.

Επίσης, στο α) έχουμε βρει ότι $AE = GZ$.

Άρα το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις AE και GZ , παράλληλες και ίσες.

ΘΕΜΑ 2

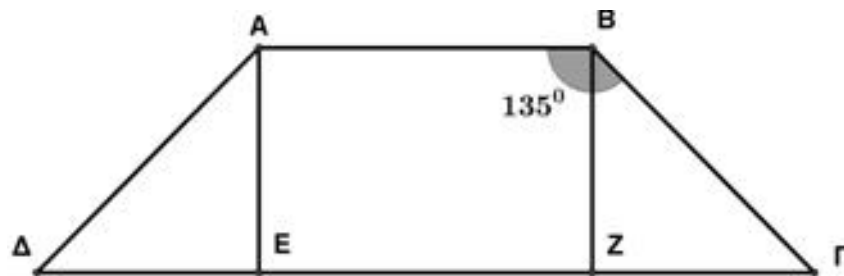
Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

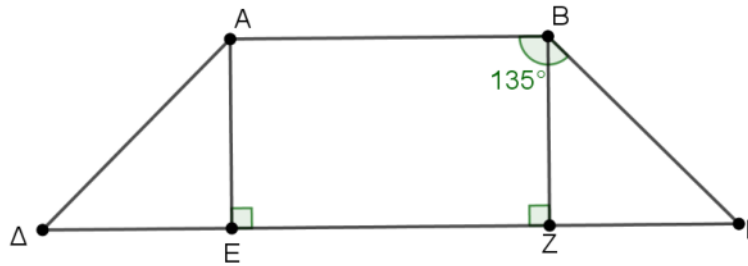
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $AE = ED = BZ = \Gamma Z$

(Μονάδες 15)





α) Το τραπέζιο είναι ισοσκελές, άρα οι γωνίες κάθε βάσης του είναι ίσες.

Επομένως $\widehat{B\Delta A} = \widehat{A\Gamma B} = 135^\circ$.

Οι $\widehat{A\Gamma B}$ και $\widehat{B\Gamma\Delta}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$\widehat{A\Gamma B} + \widehat{B\Gamma\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ + \widehat{B\Gamma\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Gamma\Delta} = 45^\circ$$

Επιπλέον, $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta}$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση $\Gamma\Delta$ του ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. Άρα $\widehat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$ οπότε από το άθροισμα των γωνιών του βρίσκουμε:

$$\widehat{Z\Gamma B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{Z\Gamma B} + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{Z\Gamma B} = 45^\circ$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $BZ = Z\Gamma$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Delta$ είναι $\widehat{\Delta} = 45^\circ$ και από το άθροισμα των γωνιών του βρίσκουμε:

$$\widehat{\Delta\Delta E} + \widehat{\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta\Delta E} + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta\Delta E} = 45^\circ$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $AE = E\Delta$ (2).

Επίσης τα ύψη του τραπεζίου είναι ίσα, οπότε $AE = BZ$ (3).

Από (1), (2) και (3) έχουμε $AE = E\Delta = BZ = Z\Gamma$.

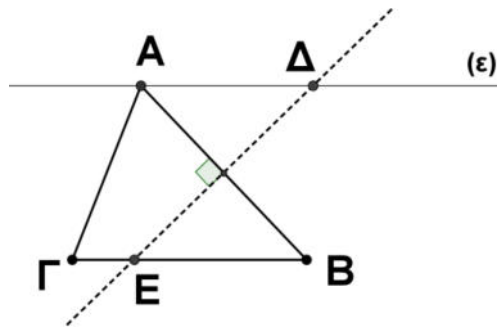
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ . Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ϵ) παράλληλη στη ΒΓ . Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ϵ) στο Δ και την ΒΓ στο Ε .

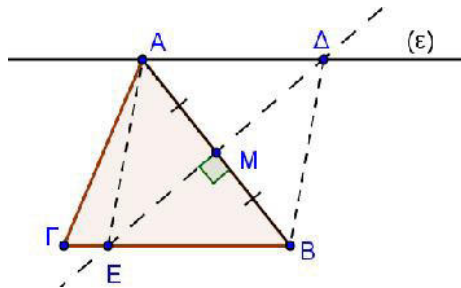
α) Να αποδείξετε ότι $\text{ΔΑ}=\text{ΔΒ}$ και $\text{ΕΑ}=\text{ΕΒ}$. (Μονάδες 6)

β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ , να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ . (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)



α) Τα σημεία E, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του AB άρα ισαπέχουν από τα σημεία A και B, ισχύει δηλαδή $ΔA = ΔB$ και $EA = EB$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AMΔ και EMB έχουν:

$AM = MB$, διότι το M είναι μέσο του AB και

$\widehat{M\Delta A} = \widehat{MBE}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε), BΓ που τέμνονται από την AB.

Άρα τα τρίγωνα AMΔ και EMB είναι ίσα επειδή έχουν τις υποτείνουσες ίσες και μια οξεία γωνία ίση μία προς μία.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων AMΔ και MEB, προκύπτει ότι $M\Delta = ME$ (απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{M\Delta A}$, $\widehat{MBE}$). Άρα, στο τετράπλευρο AΔBE οι διαγώνιοί του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος.

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)

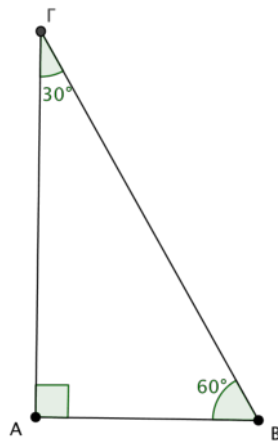
β) Αν η πλευρά BΓ=2cm να βρείτε το μήκος της AB. (Μονάδες 10)

α) Ισχύει ότι: $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Άρα $\hat{A} = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABΓ βρίσκουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ισχύει:

$$AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}.$$

ΘΕΜΑ 2

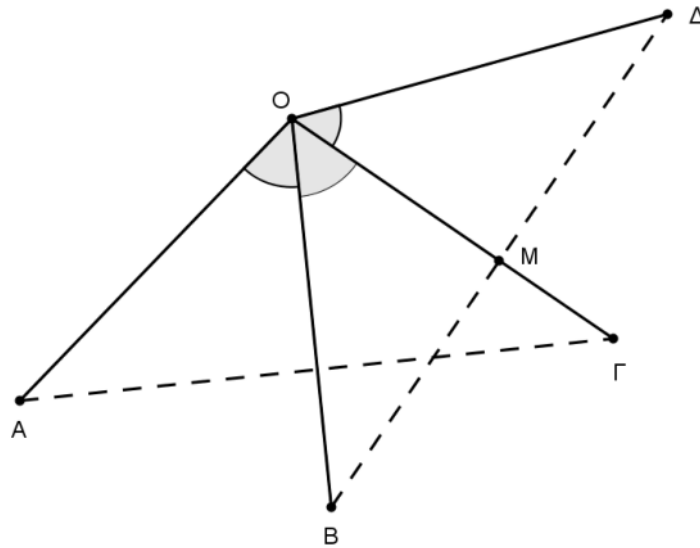
Αν $\hat{A}OB = \hat{B}OG = \hat{G}OD$ και $OA = OB = OG = OD$, να αποδείξετε ότι:

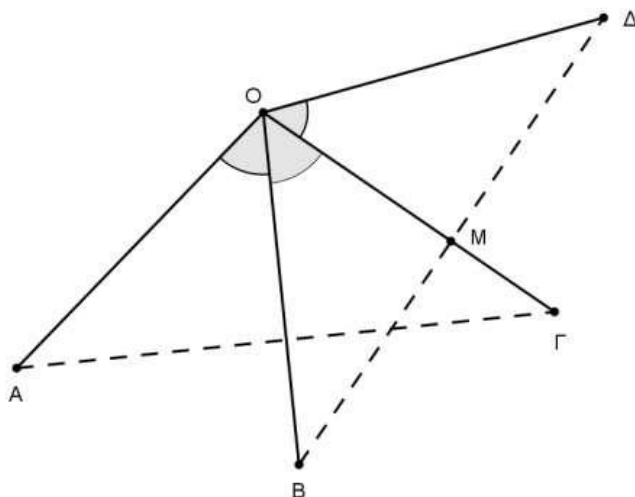
α) $AG = BD$.

(Μονάδες 10)

β) Το M είναι μέσον της BD , όπου M το σημείο τομής των τμημάτων OG και BD .

(Μονάδες 15)





α) Έστω ότι $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \hat{\omega}$.

Τα τρίγωνα AOC και BOD έχουν:

$OA = OB$, από υπόθεση

$OC = OD$, από υπόθεση

$\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$, διότι $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 2\hat{\omega}$ και $\widehat{BOD} = \widehat{BOC} + \widehat{COD} = 2\hat{\omega}$

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα AOC και BOD είναι ίσα οπότε έχουν και

$AC = BD$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες AOC, BOD.

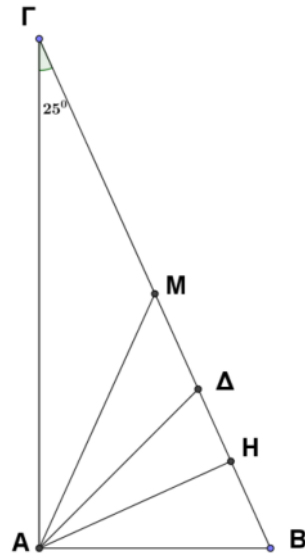
β) Στο ισοσκελές τρίγωνο BOD η OM είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, άρα είναι και διάμεσος του BOD. Επομένως το M είναι μέσο του BD.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{AMB}$, $\hat{HAB}$, $\hat{ADB}$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{MAD} = \hat{DAH} = 20^\circ$. (Μονάδες 10)



α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκουμε:

$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} + 25^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 65^\circ.$$

Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

ΑΒΓ, οπότε ισχύει: $AM = \frac{BG}{2} = MG = MB$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΜΒ είναι ισοσκελή, οπότε:

$$\widehat{MAG} = \widehat{\Gamma} = 25^\circ \text{ και } \widehat{MAB} = \widehat{B} = 65^\circ.$$

Η γωνία ΑΜΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ, άρα $\widehat{AMB} = \widehat{MAG} + \widehat{\Gamma} = 50^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΗΑΒ προκύπτει:

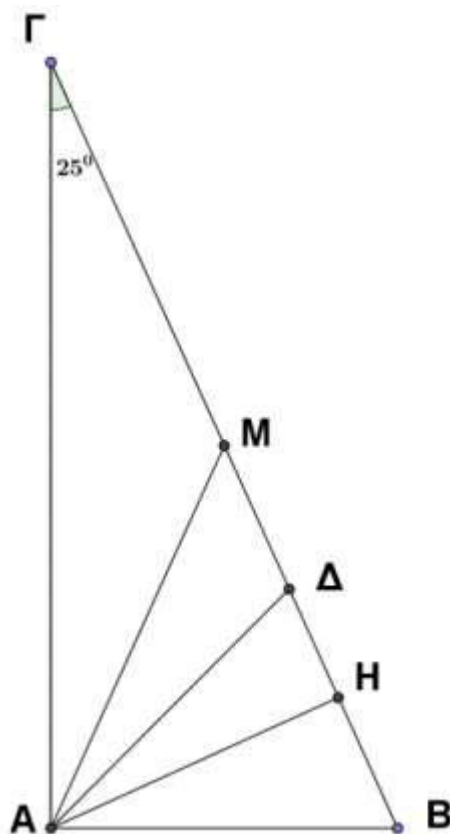
$$\widehat{HAB} + \widehat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{HAB} + 65^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{HAB} = 25^\circ.$$

Η γωνία ΑΔΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα

$$\widehat{ADB} = \widehat{ADG} + \widehat{\Gamma} = \frac{\widehat{A}}{2} + 25^\circ = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ.$$

β) Ισχύει ότι:

$$\widehat{MAD} = \widehat{ADG} - \widehat{MAG} = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ \text{ και } \widehat{DAH} = \widehat{ADB} - \widehat{HAB} = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ.$$



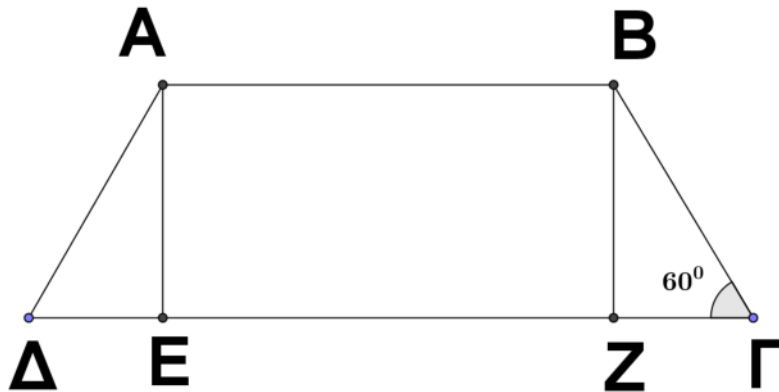
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα $AE\Delta$, $BZ\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)



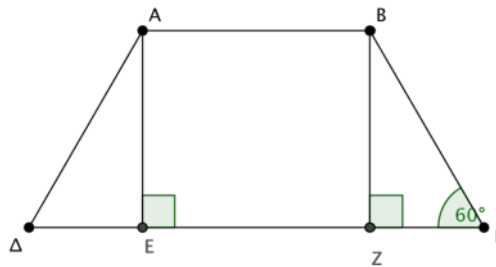
α) Οι γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίσες, άρα

$$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 120^\circ.$$

Άρα και $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$ ως γωνίες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

$AD = BG$, διότι το τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel GD$) είναι ισοσκελές

$$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα επειδή έχουν ίσες υποτείνουσες και προσκείμενες σ' αυτές οξείες γωνίες ίσες.

γ) Είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\hat{ABZ} = 90^\circ$, άρα $\hat{ZBG} = \hat{B} - \hat{ABZ} = 30^\circ$.

Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ ισχύει ότι: $ZG = \frac{BG}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Επειδή, τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα, έχουν και $DE = ZG = 2$.

Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο διότι οι γωνίες Ε και Ζ είναι ορθές και $\hat{EAB} = 90^\circ$ διότι οι γωνίες Ε και ΕΑΒ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΕ.

Επομένως ισχύει ότι $EZ = AB = 6$.

Οπότε: $\Delta\Gamma = \Delta E + EZ + Z\Gamma = 2 + 6 + 2 = 10$.

Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι:

$$\Pi = AB + BG + \Gamma\Delta + \Delta A = 6 + 4 + 10 + 4 = 24.$$

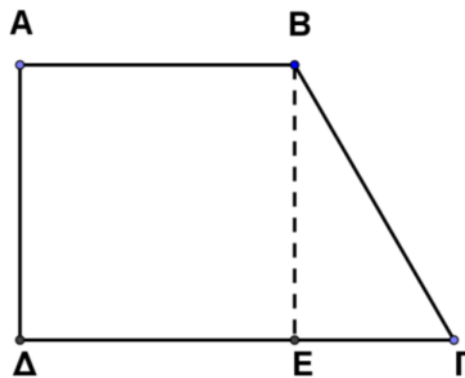
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB=B\Gamma=4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος BE από τη κορυφή B .

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε $2E\Gamma=B\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) Αν M, N τα μέσα των πλευρών $AD, B\Gamma$ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος MN . (Μονάδες 8)



α) Είναι $AD \perp AB$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα και $AD \perp \Gamma\Delta$, οπότε $\widehat{A} = 90^\circ$.

Οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 120^\circ.$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $BE\Gamma$, έχουμε:

$$\widehat{EB\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{EB\Gamma} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{EB\Gamma} = 30^\circ.$$

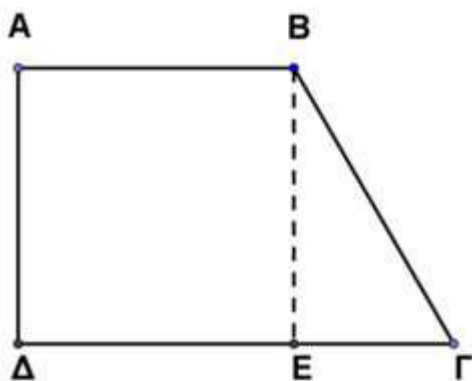
Άρα η απέναντι κάθετη πλευρά $ΕΓ$ της $\widehat{EB\Gamma}$ στο τρίγωνο $BE\Gamma$ ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $ΕΓ = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2ΕΓ$.

γ) Είναι $ΕΓ = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Τα τμήματα AD και BE σχηματίζουν ορθές γωνίες με τις παράλληλες πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ άρα το τετράπλευρο $ABED$ είναι ορθογώνιο, οπότε $AB = DE = 4$.

Το τμήμα MN ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου, οπότε είναι διάμεσος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ και ισχύει ότι:

$$MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + DE + E\Gamma}{2} = \frac{4 + 4 + 2}{2} = 5.$$

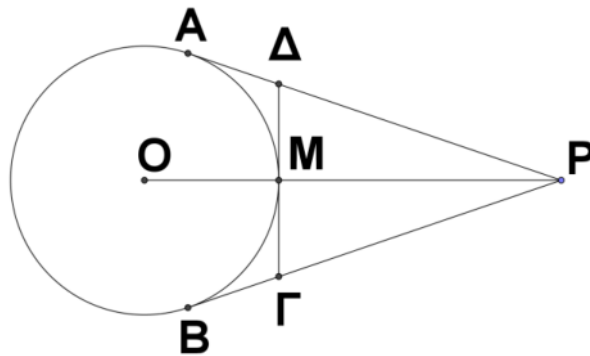


ΘΕΜΑ 2

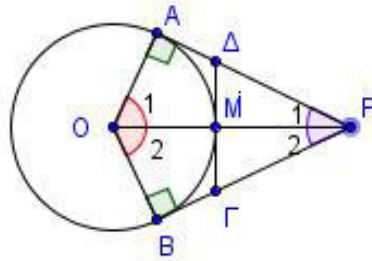
Δίνεται κύκλος κέντρου O , και από ένα σημείο P εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία APB είναι 40° να υπολογίσετε τη γωνία AOB . (Μονάδες 12)



α) Η ακτίνα OM έχει άκρο το σημείο επαφής M άρα είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΔΓ. Η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων PA και PB, δηλαδή την $\widehat{APB}$. Οπότε στο τρίγωνο PΓΔ η PM είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου OAPB είναι 360° . Οπότε:

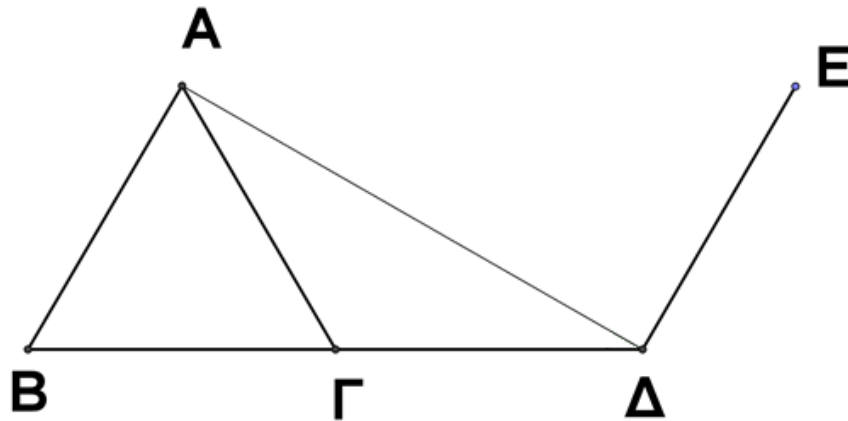
$$\widehat{AOB} + \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{P} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOB} + 90^\circ + 90^\circ + 40^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 140^\circ.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην AD στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $\Delta E=B\Gamma$. (A και E στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $AB\Delta E$ παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



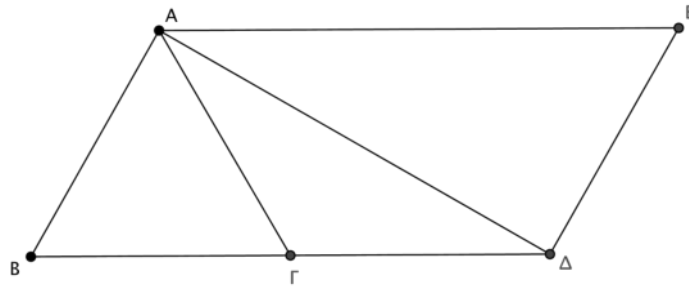
α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\widehat{B\hat{A}G} = \widehat{A\hat{B}G} = \widehat{A\hat{G}B} = 60^\circ$. Τότε $\widehat{A\hat{G}D} = 180^\circ - \widehat{A\hat{G}B} = 120^\circ$.

Επειδή $ΓΔ = ΒΓ = ΑΓ$, το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, άρα $\widehat{Γ\hat{A}D} = \widehat{A\hat{D}G}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΓΔ έχουμε:

$$\widehat{Γ\hat{A}D} + \widehat{A\hat{G}D} + \widehat{A\hat{D}G} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A\hat{D}G} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A\hat{D}G} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{D}G} = 30^\circ$$

άρα και $\widehat{Γ\hat{A}D} = 30^\circ$. Τότε: $\widehat{B\hat{A}D} = \widehat{B\hat{A}G} + \widehat{Γ\hat{A}D} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.



β) Επειδή, $AB \perp AD$ και $ED \perp AD$ είναι $AB \parallel ED$.

Όμως $AB = BG = ED$ και $AB \parallel ED$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΕ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΕ ίσες και παράλληλες και συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 2

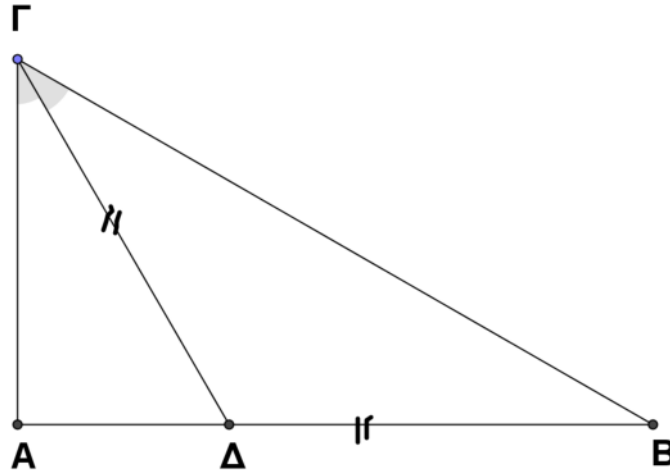
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{cm}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = 30^\circ$.

(Μονάδες 12)

β) $AB = 3\text{cm}$

(Μονάδες 13)



α) Επειδή $\Gamma\Delta = \Delta B$, το τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}B = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\widehat{\Gamma}}{2} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} + 2\widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 60^\circ.$$

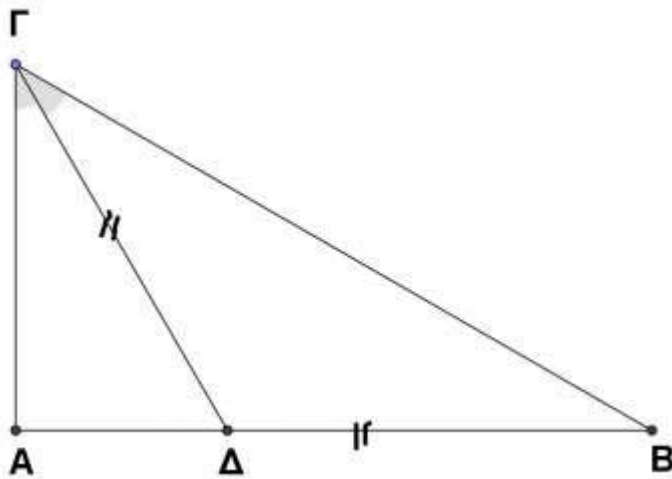
Τότε από την (1) είναι $\widehat{B} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\widehat{\Gamma}A = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = 30^\circ$. Άρα η πλευρά $A\Delta$ η οποία είναι

απέναντι από τη γωνία $\Delta\Gamma A$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας $\Gamma\Delta$, δηλαδή:

$$A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}.$$

Τότε: $AB = A\Delta + \Delta B = 1\text{cm} + 2\text{cm} = 3\text{cm}$.

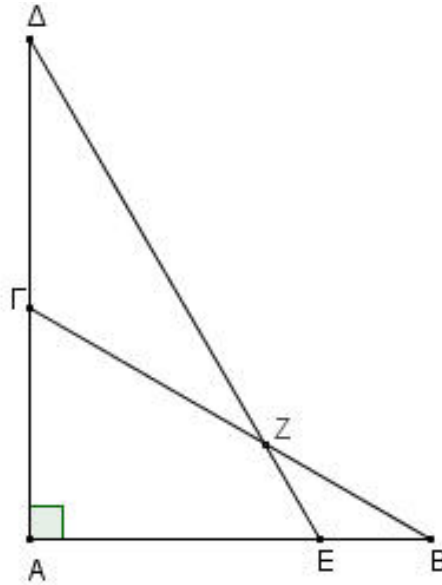


ΘΕΜΑ 2

Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία A ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AEZ\Gamma$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και EBZ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)



α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 30^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, είναι:

$$\hat{A} + \hat{\Delta} + \hat{A\hat{E}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 30^\circ + \hat{A\hat{E}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ.$$

Η γωνία $\hat{A\hat{E}\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΖΒ, οπότε ισχύει:

$$\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{E\hat{Z}B} + \hat{B} \Leftrightarrow 60^\circ = \hat{E\hat{Z}B} + 30^\circ \Leftrightarrow \hat{E\hat{Z}B} = 30^\circ.$$

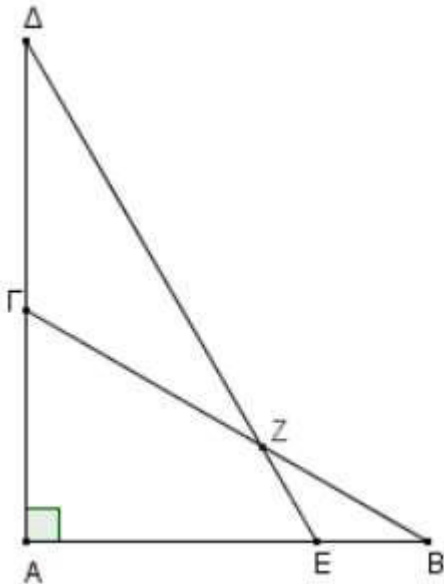
Οι γωνίες $\hat{\Gamma\hat{Z}E}$ και $\hat{E\hat{Z}B}$ είναι παραπληρωματικές οπότε ισχύει:

$$\hat{\Gamma\hat{Z}E} + \hat{E\hat{Z}B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma\hat{Z}E} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma\hat{Z}E} = 150^\circ.$$

β) Επειδή $\hat{E\hat{Z}B} = \hat{B} = 30^\circ$, το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές.

Επειδή οι γωνίες $\hat{E\hat{Z}B}$ και $\hat{\Gamma\hat{Z}\Delta}$ είναι κατακορυφήν, ισχύει ότι $\hat{\Gamma\hat{Z}\Delta} = \hat{E\hat{Z}B} = 30^\circ$.

Άρα $\hat{\Gamma\hat{Z}\Delta} = \hat{\Delta}$, οπότε το τρίγωνο ΓΖΔ είναι ισοσκελές.

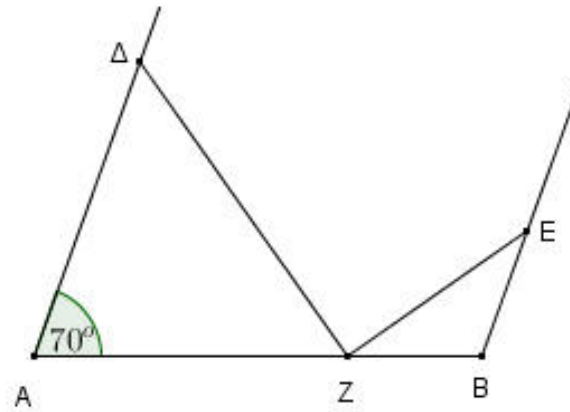


ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, οι AD και BE είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $AD=AZ$, $BE=BZ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $A\Delta Z$ και BZE . (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{Z}E = 90^\circ$. (Μονάδες 9)



α) Επειδή $AD = DZ$, το τρίγωνο ADZ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{A} = \hat{DZA}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ADZ , και τη σχέση (1) έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{A} + \hat{DZA} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 2\hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A} = 110^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 55^\circ. \text{ Οπότε } \hat{DZA} = \hat{A} = 55^\circ.$$

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD , BE που τέμνονται από την AB , οπότε είναι παραπληρωματικές. Άρα:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 110^\circ.$$

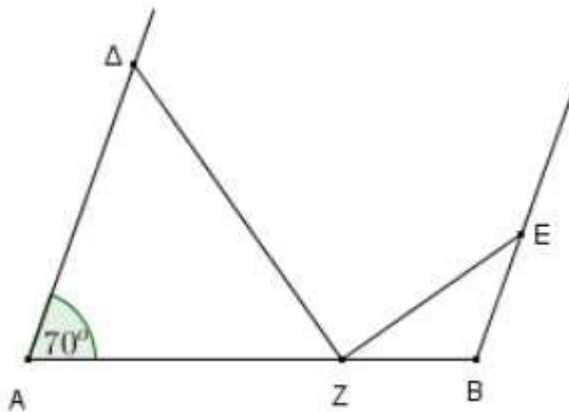
Επειδή, $BE = BZ$, το τρίγωνο BEZ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{EZB} = \hat{E}$ (2).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BEZ έχουμε:

$$\hat{B} + \hat{E} + \hat{EZB} = 180^\circ \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 110^\circ + 2\hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 35^\circ.$$

Οπότε $\hat{EZB} = \hat{E} = 35^\circ$.

β) Ισχύει ότι: $\hat{DZE} = 180^\circ - \hat{DZA} - \hat{EZB} = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$.



ΘΕΜΑ 2

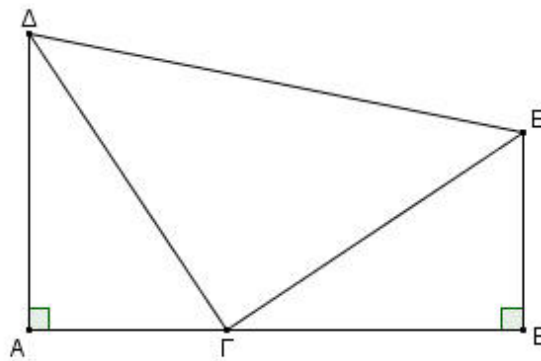
Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $AD=BG$ και $AG=BE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AG\Delta$ και BGE είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $\hat{EGB} = 40^\circ$ τότε το τρίγωνο ΔGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ έχουν:

$AD = BG$, από υπόθεση

$AG = BE$, από υπόθεση

Οπότε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα αφού έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες .

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ προκύπτει ότι $DG = GE$, οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΓΕ είναι:

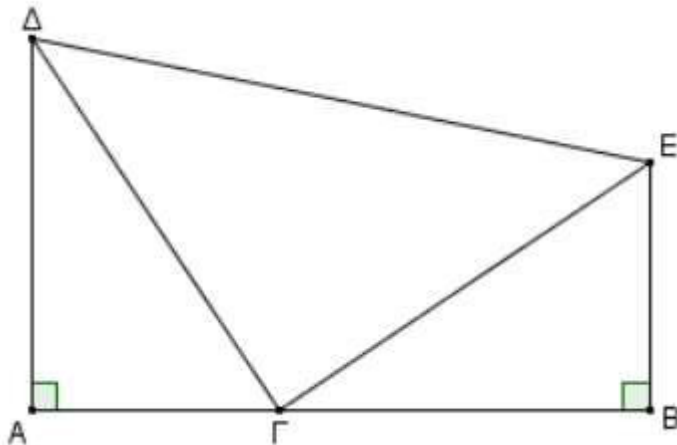
$$\widehat{EGB} + \widehat{B} + \widehat{BEG} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 90^\circ + \widehat{BEG} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BEG} = 50^\circ.$$

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ προκύπτει ότι $\widehat{DGA} = \widehat{BEG}$ (ως απέναντι των ίσων πλευρών ΑΔ και ΒΓ). Άρα $\widehat{DGA} = \widehat{BEG} = 50^\circ$.

Ισχύει ότι:

$$\widehat{DGA} + \widehat{DGE} + \widehat{EGB} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \widehat{DGE} + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{DGE} = 90^\circ.$$

Άρα το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η AD είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $AD = DE$.

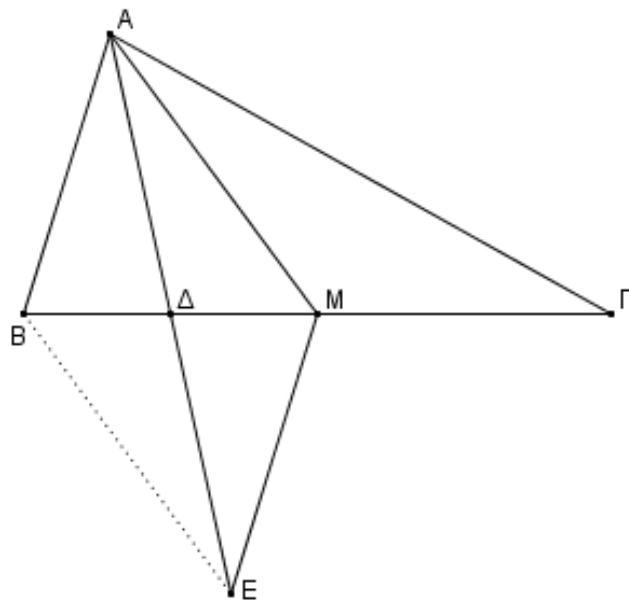
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.

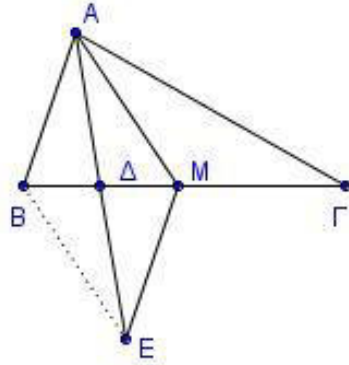
(Μονάδες 12)

β) $ME = M\Gamma$

(Μονάδες 13)



α) Είναι $AD = DE$ από υπόθεση και $BD = DM$ (επειδή η AD είναι διάμεσος στο τρίγωνο ABM). Άρα οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ABEM$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Επειδή $ME = AB$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ισχύει ότι:

$$B\Gamma = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow ME = M\Gamma.$$

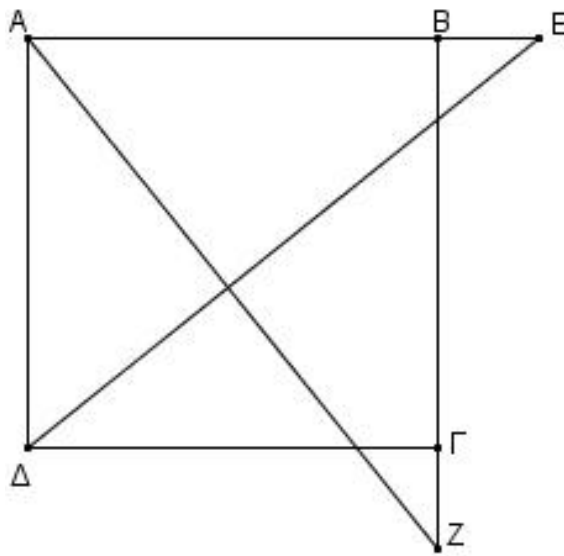
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABZ και $AE\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες $E\Delta\Gamma$ και AZB είναι ίσες. (Μονάδες 13)



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και AED έχουν:

$AD = AB$, ως πλευρές του τετραγώνου

$AE = BZ$, διότι $AB = BG$ (πλευρές τετραγώνου) και $BE = GZ$ οπότε $AB + BE = BG + GZ \Leftrightarrow AE = BZ$.

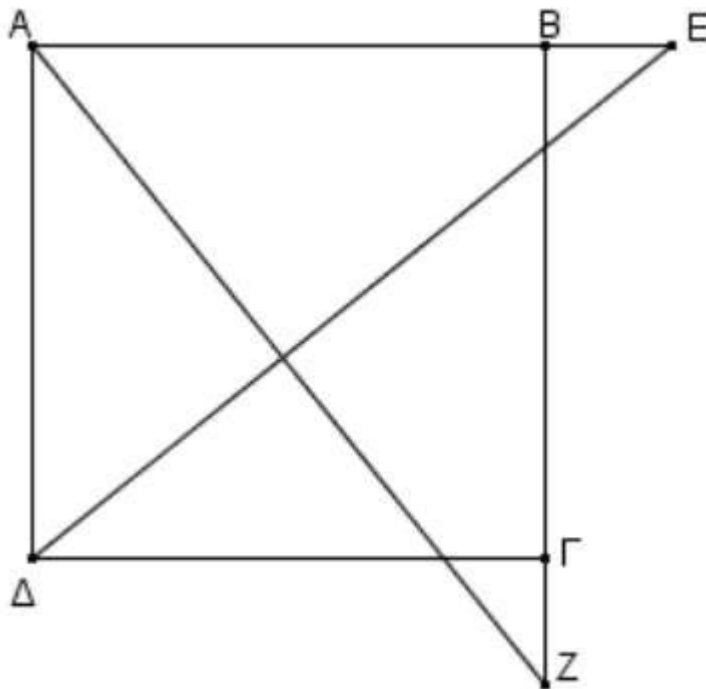
Άρα τα τρίγωνα ABZ και AED είναι ίσα αφού έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες.

β) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\hat{AED} = \hat{ABZ}$ (1) επειδή είναι

απέναντι από τις ίσες πλευρές AD και AB. Ισχύει επίσης ότι:

$\hat{AED} = \hat{EAG}$ (2), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ.

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{ABZ} = \hat{EAG}$.

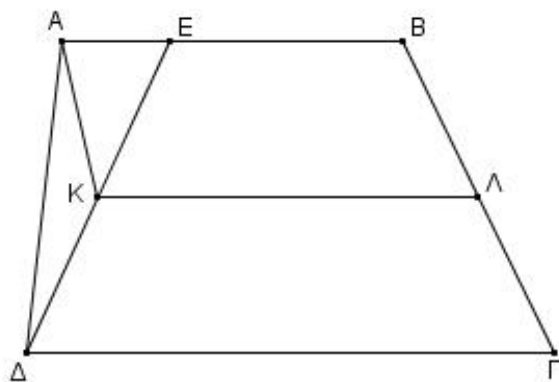


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=3$, $\Gamma\Delta=4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE=1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπεζίου $EB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



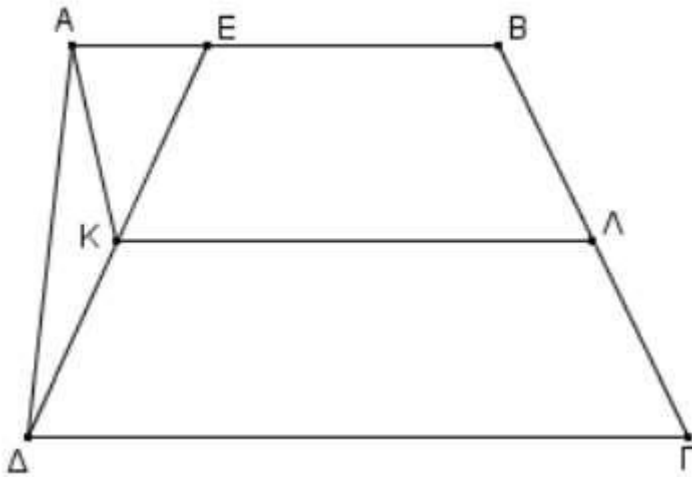
α) Είναι $EB = AB - AE = 3 - 1 = 2$. Επειδή $ΚΛ$ διάμεσος του τραπεζίου $ΕΒΓΔ$ έχουμε:

$$ΚΛ = \frac{EB + ΓΔ}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

β) Επειδή $ΚΛ$ διάμεσος του τραπεζίου $ΕΒΓΔ$ ισχύει ότι:

$$ΚΛ \parallel EB \text{ ή } ΚΛ \parallel AB \text{ και } ΚΛ = 3 = AB.$$

Άρα στο τετράπλευρο $ΑΒΚΛ$ οι απέναντι πλευρές του $ΑΒ$ και $ΚΛ$ είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

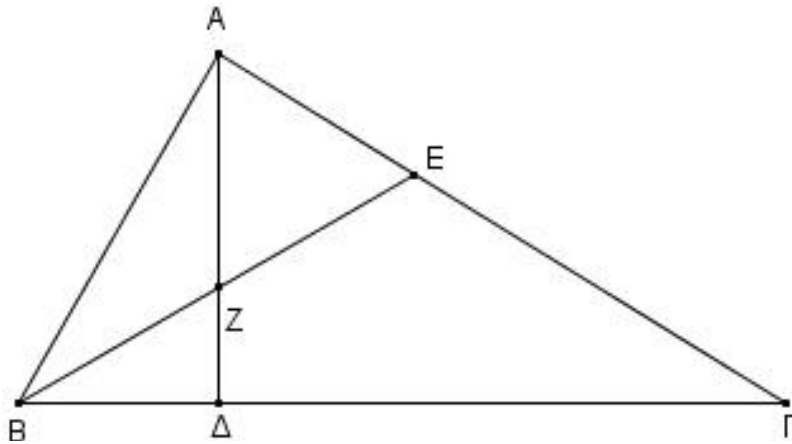


ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

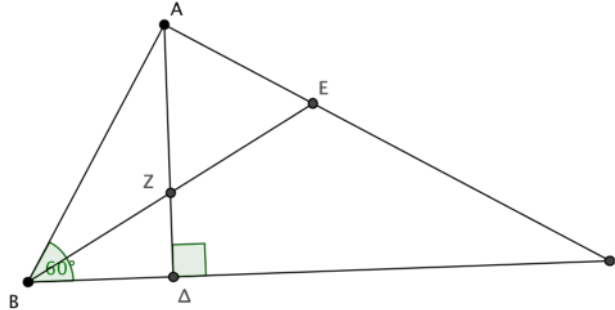
α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι 60° . (Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 15)



α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} + 2\widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 60^\circ.$$



β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{\Gamma} + 60^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 4\widehat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^\circ.$$

$$\text{Τότε: } \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow \widehat{A} + 30^\circ = 2 \cdot 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = 90^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΕ έχουμε:

$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{ABE} + \widehat{AEB} &= 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{AEB} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{60^\circ}{2} + \widehat{AEB} = 90^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 30^\circ + \widehat{AEB} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{AEB} = 60^\circ. \end{aligned}$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ έχουμε:

$$\widehat{\Gamma\Delta A} + \widehat{\Delta} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma\Delta A} + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma\Delta A} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma\Delta A} = 60^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ έχουμε:

$$\begin{aligned} \widehat{Z\Delta E} + \widehat{A\Delta E} + \widehat{A\Delta Z} &= 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \widehat{A\Delta E} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \widehat{A\Delta E} = 180^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \widehat{A\Delta E} = 60^\circ. \end{aligned}$$

Το τρίγωνο ΑΖΕ έχει όλες τις γωνίες του ίσες οπότε είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B . Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$

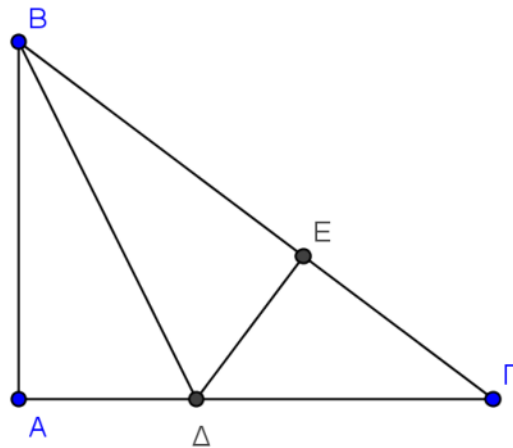
(Μονάδες 8)

β) $AD < \Delta\Gamma$

(Μονάδες 9)

γ) $A\Gamma > AB$

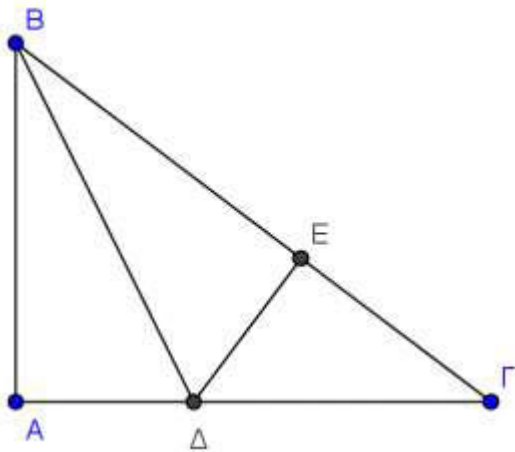
(Μονάδες 8)



α) Το σημείο Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Β άρα ισαπέχει από τις πλευρές ΒΑ, ΒΓ της γωνίας αυτής. Οπότε $AD = DE$ αφού $AD \perp AB$ και $DE \perp BG$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ η ΔΓ είναι απέναντι από την ορθή γωνία Ε, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Οπότε $ΔΓ > ΔΕ$. Επειδή $AD = DE$, προκύπτει ότι: $AD < ΔΓ$.

γ) Γνωρίζουμε ότι σ' ένα τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{\Gamma} < \hat{B}$ οπότε $AB < ΑΓ$.



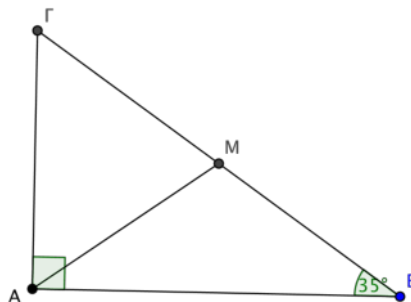
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ . (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB . (Μονάδες 15)

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε: $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 55^\circ$.



β) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ΑΒΓ,

$$\text{άρα } AM = \frac{BG}{2} = MB.$$

Επειδή $AM = MB$, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές, άρα $\widehat{BAM} = \widehat{B} = 35^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΜΒ είναι:

$$\widehat{AMB} + \widehat{BAM} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AMB} + 35^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AMB} = 110^\circ.$$

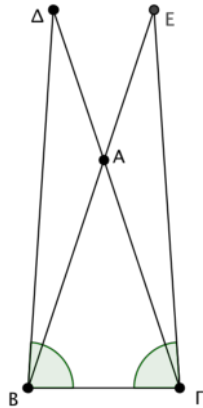
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $A\Delta = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $BE = \Gamma\Delta$ (Μονάδες 6)
- β) $B\Delta = \Gamma E$ (Μονάδες 10)
- γ) $\hat{A}B\Gamma = \hat{E}\Gamma B$ (Μονάδες 9)

α) Επειδή $AB = AG$ και $AE = AD$ είναι $AB + AE = AG + AD \Leftrightarrow BE = GD$.



β) Τα τρίγωνα ΔBA και $\epsilon ΓΑ$ έχουν:

$AB = AG$, από υπόθεση

$AD = AE$, από υπόθεση

$\widehat{\Delta AB} = \widehat{\epsilon AG}$, ως κατακορυφήν.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔBA και $\epsilon ΓΑ$ είναι ίσα οπότε $BD = GE$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta AB}$, $\widehat{\epsilon AG}$.

γ) Τα τρίγωνα ΔBA και $\epsilon ΓΑ$ είναι ίσα οπότε: $\widehat{\Delta BA} = \widehat{\epsilon ΓΑ}$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές AD και AE . Το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές συνεπώς: $\widehat{\Gamma BA} = \widehat{B ΓΑ}$.
Άρα $\widehat{\Delta BA} + \widehat{\Gamma BA} = \widehat{\epsilon ΓΑ} + \widehat{B ΓΑ}$ ή $\widehat{\Delta BΓ} = \widehat{\epsilon ΓB}$.

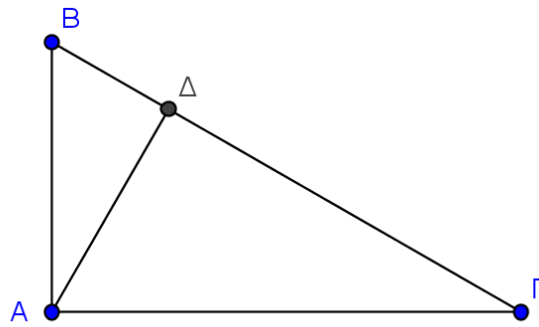
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και $A\Delta$ το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογιστεί η γωνία $BA\Delta$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 9)



α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

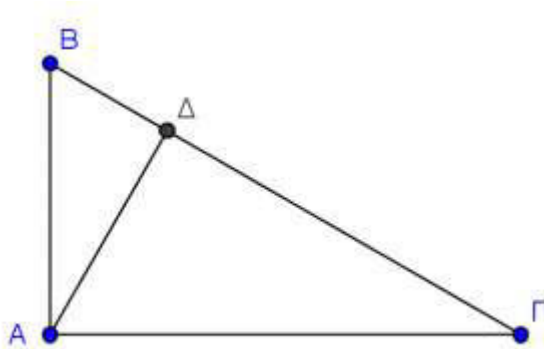
$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^\circ \text{ και } \widehat{B} = 2\widehat{\Gamma} = 60^\circ.$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ είναι:

$$\widehat{B} + \widehat{B\hat{A}\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \widehat{B\hat{A}\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{A}\Delta} = 30^\circ.$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά είναι

ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $B\Delta = \frac{AB}{2}$.



ΘΕΜΑ 2

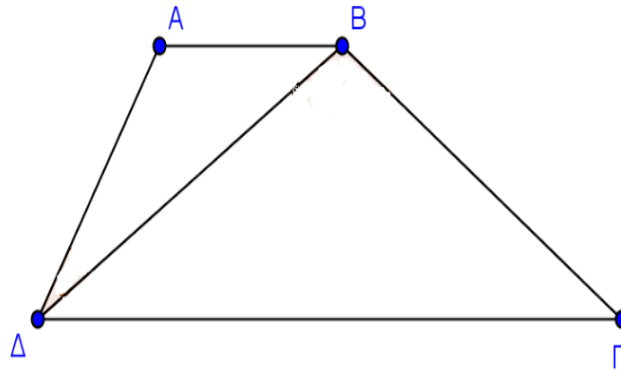
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\hat{\Delta B \Gamma} = 110^\circ$ και $\hat{A \Delta B} = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

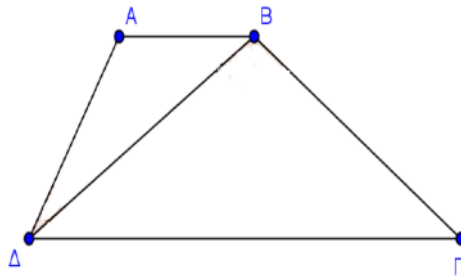
α) Τη γωνία Γ .

(Μονάδες 11)

β) Τη γωνία A .

(Μονάδες 14)





α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με $ΒΔ = ΒΓ$, άρα $\widehat{ΒΔΓ} = \widehat{Γ}$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΓ έχουμε:

$$\widehat{ΒΔΓ} + \widehat{Γ} + \widehat{ΒΓΔ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{Γ} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{Γ} = 70^\circ \Leftrightarrow \widehat{Γ} = 35^\circ$$

β) Είναι $\widehat{ΒΔΓ} = \widehat{Γ} = 35^\circ$ οπότε $\widehat{ΑΔΓ} = \widehat{ΑΔΒ} + \widehat{ΒΔΓ} = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$

Οι γωνίες $\widehat{Α}$ και $\widehat{ΑΔΓ}$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ και είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$$\widehat{Α} + \widehat{ΑΔΓ} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{Α} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{Α} = 120^\circ$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i. $\hat{A}BE$

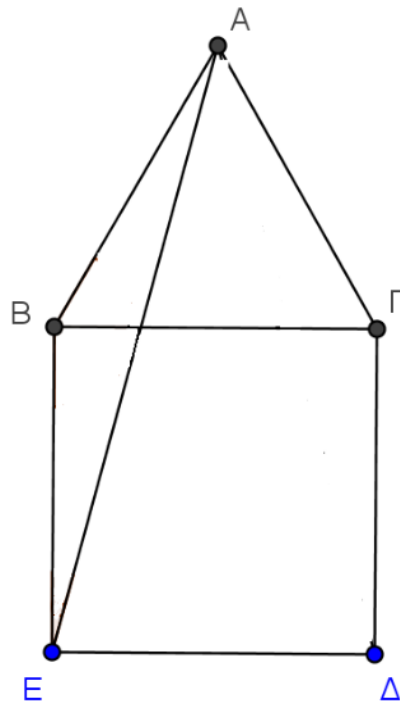
(Μονάδες 8)

ii. $\hat{B}EA$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)



α) i. Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο είναι $\widehat{AB\Gamma} = 60^\circ$.

Επίσης $\widehat{B\Gamma\Delta} = 90^\circ$ διότι το BΓΔΕ είναι τετράγωνο.

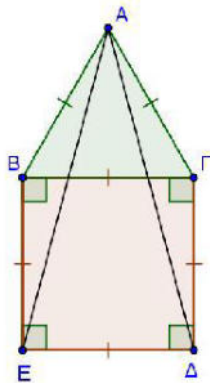
Τότε $\widehat{ABE} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{E\Gamma\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

ii. Επειδή $AB = B\Gamma = BE$, το τρίγωνο BEA είναι ισοσκελές

οπότε $\widehat{BEA} = \widehat{BAE}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BEA βρίσκουμε:

$$\widehat{BEA} + \widehat{BAE} + \widehat{ABE} = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\widehat{BEA} + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{BEA} = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{BEA} = 15^\circ$$



β) Τα τρίγωνα ABE και AΓΔ έχουν:

- $AB = A\Gamma$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ABΓ
- $BE = \Gamma\Delta$, ως πλευρές του τετραγώνου BΓΔΕ
- $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A\Gamma B} + \widehat{B\Gamma\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ = \widehat{ABE}$

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = A\Delta$,
άρα το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

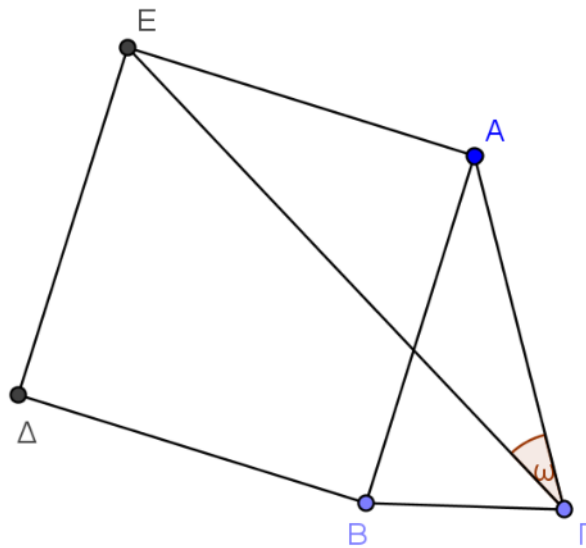
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

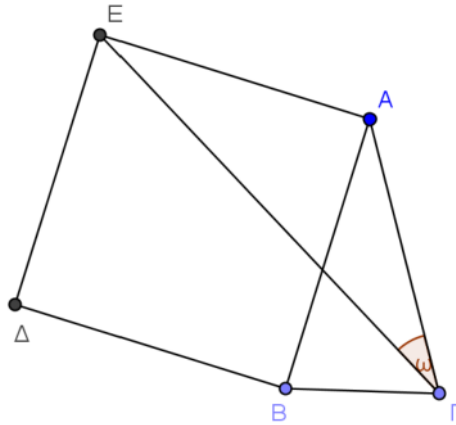
α) Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) $2 \cdot \hat{E}\Gamma A = 90^\circ - \hat{B}A\Gamma$.

(Μονάδες 15)





α) Είναι $AB = AE$ ως πλευρές τετραγώνου και $AB = AG$ από υπόθεση. Άρα $AE = AG$, οπότε το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές ισχύει ότι $\widehat{AEG} = \widehat{EGA}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AEG έχουμε:

$$\widehat{EAG} + \widehat{AEG} + \widehat{EGA} = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\widehat{EGA} + \widehat{EAB} + \widehat{BAG} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{EGA} + 90^\circ + \widehat{BAG} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{EGA} = 90^\circ - \widehat{BAG}$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ.

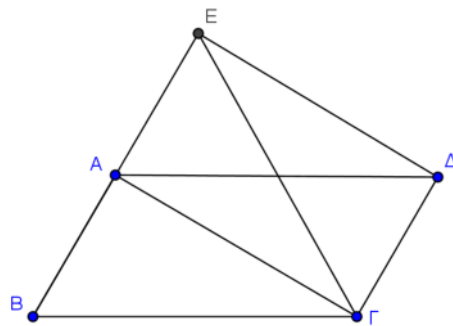
(Μονάδες 8)

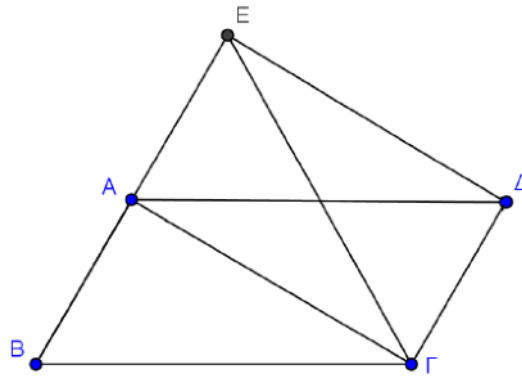
β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

γ) $\hat{B\Gamma A} = \hat{A\Delta E}$

(Μονάδες 8)





α) Είναι $AB = ΓΔ$ (1) και $AB \parallel ΓΔ$ (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$.

Επίσης $AE = ΓΔ$ (3) και $AE \parallel ΓΔ$ (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $ΑΓΔΕ$.

Άρα από (2), (4) προκύπτει ότι $AB \parallel AE$ άρα τα B, A και E είναι συνευθειακά και επειδή $AB = AE$, λόγω των (1), (3), το σημείο A είναι μέσο του BE .

β) Είναι $AD = BΓ$ (5) διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$. Επίσης $AD = ΓΕ$ (6) διότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες. Άρα από (5), (6) βρίσκουμε $BΓ = ΓΕ$, οπότε το τρίγωνο $BΓΕ$ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $\widehat{BΓA} = \widehat{ΓΑΔ}$ (7), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AD, BΓ$ που τέμνονται από την $ΑΓ$ και $\widehat{AΔΕ} = \widehat{ΓΑΔ}$ (8) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΑΓ, ΔΕ$ που τέμνονται από την AD . Άρα από (7), (8) ισχύει $\widehat{BΓA} = \widehat{AΔΕ}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $ΑΒΔΓ$ και $ΒΔΕΖ$.

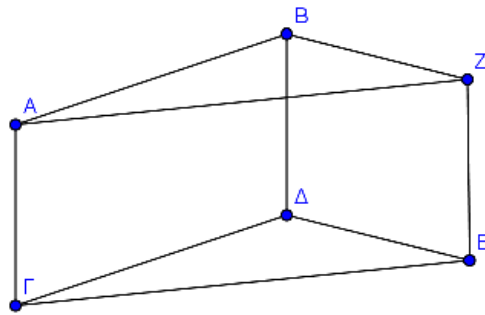
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΑΓΕΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

β) $\hat{ΑΒΖ} = \hat{ΓΔΕ}$.

(Μονάδες 12)



- $AB = \Gamma\Delta$, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$
- $BZ = \Delta E$, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $BZE\Delta$
- $AZ = \Gamma E$, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AZE\Gamma$

Από το κριτήριο Π-Π Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ABZ και ΓΔΕ είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{ABZ} = \hat{\Gamma\Delta E}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ).

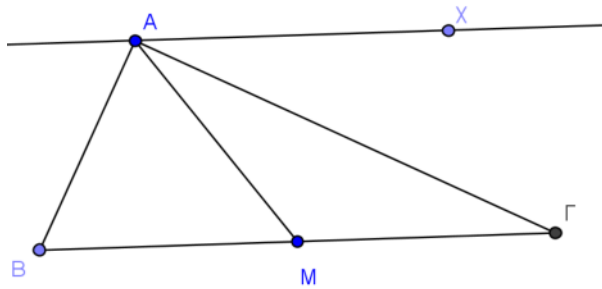
Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{MAG} = \widehat{MGA}$

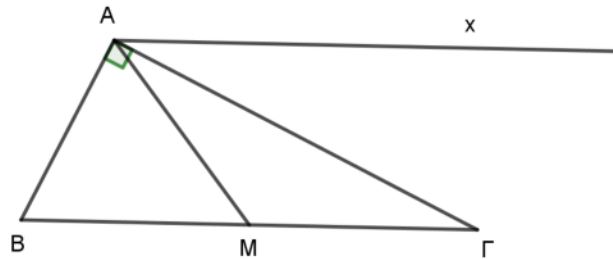
(Μονάδες 12)

β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx .

(Μονάδες 13)



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ισχύει ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG$.



Επομένως το τρίγωνο AMΓ είναι ισοσκελές, οπότε άρα $\widehat{M\hat{A}\Gamma} = \widehat{M\hat{\Gamma}A}$ (1).

β) Είναι $\widehat{M\hat{\Gamma}A} = \widehat{\Gamma\hat{A}x}$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Ax, BΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Από τις (1), (2) βρίσκουμε: $\widehat{M\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{A}x}$, άρα η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{M\hat{A}x}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

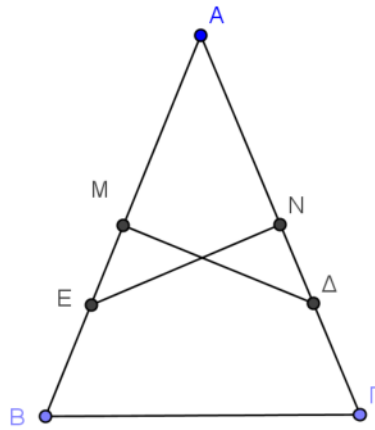
Να αποδείξετε ότι:

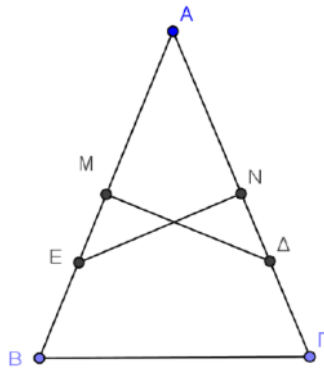
α) Αν $M\Delta = NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = NE$

(Μονάδες 13)





α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AMΔ$ και AEN έχουν:

- $MD = NE$
- $\hat{A}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και ισχύει $AM = AN$ γιατί έχουν τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα $\frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ οπότε $AB = A\Gamma$

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AMΔ$ και AEN έχουν:

- $AM = AN$, ως μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$
- $\hat{A}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν $MD = NE$ επειδή έχουν την απέναντι γωνία τους $\hat{A}$ κοινή.

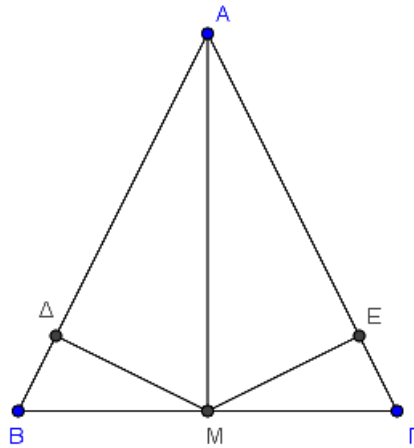
ΘΕΜΑ 2

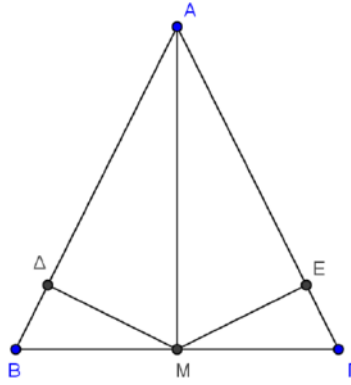
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν $AB = A\Gamma$ και M μέσο του $B\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$. (Μονάδες 12)





α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΑΜΕ$ έχουν:

- $ΜΑ$ κοινή πλευρά
- $ΜΔ = ΜΕ$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΜΔΒ$ και $ΜΕΓ$ έχουν:

- $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$, ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου
- $ΜΒ = ΜΓ$, αφού $Μ$ μέσο του $ΒΓ$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν $ΜΔ = ΜΕ$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $M\Delta = ME$ τότε:

i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα.

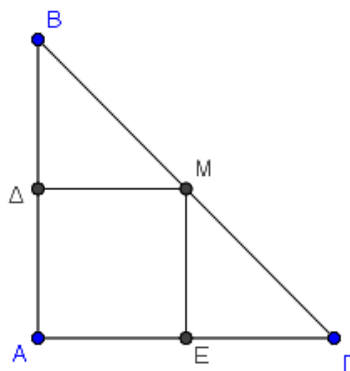
(Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = ME$.

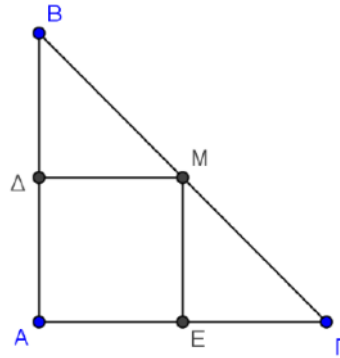
(Μονάδες 8)



α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ έχουν:

- $M\Delta = ME$
- $MB = MG$, διότι M μέσο της $B\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.



ii. Από τα ίσα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ προκύπτει ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές $M\Delta$ και ME . Άρα $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ έχουν:

$MB = MG$, διότι M μέσο της $B\Gamma$

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα, οπότε ισχύει $M\Delta = ME$ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB .

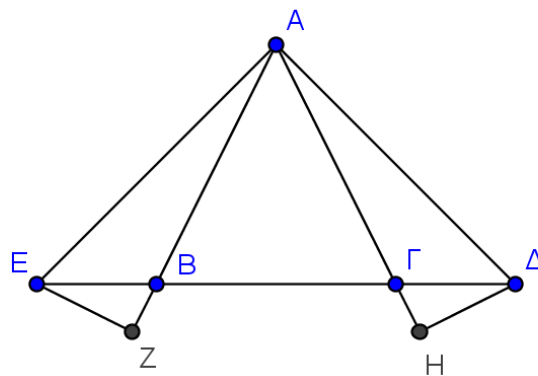
Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = AE$

(Μονάδες 12)

β) $EZ = \Delta H$

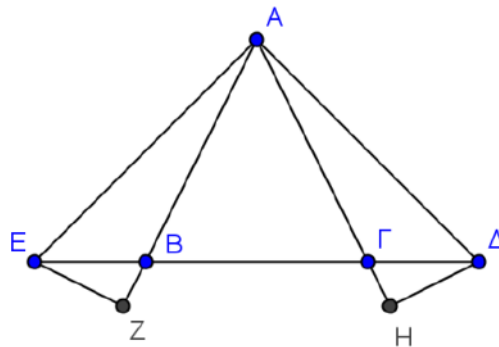
(Μονάδες 13)



α) Τα τρίγωνα ABE και AΓΔ έχουν:

- $AB = A\Gamma$ από την υπόθεση,
- $\Gamma\Delta = BE$ από την υπόθεση,
- $\widehat{B\epsilon} = \widehat{A\Gamma\Delta}$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ABE και AΓΔ είναι ίσα, οπότε έχουν και $AD=AE$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B\epsilon}$ και $\widehat{A\Gamma\Delta}$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα EBZ και ΓΗΔ έχουν:

- $\Gamma\Delta = BE$ από την υπόθεση,
- $\widehat{B\epsilon} = \widehat{A\Gamma\Delta}$ ως κατακορυφήν με τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.

Άρα τα τρίγωνα EBZ και ΓΗΔ είναι ίσα οπότε $EZ = \Delta H$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B\epsilon} = \widehat{A\Gamma\Delta}$.

ΘΕΜΑ 2

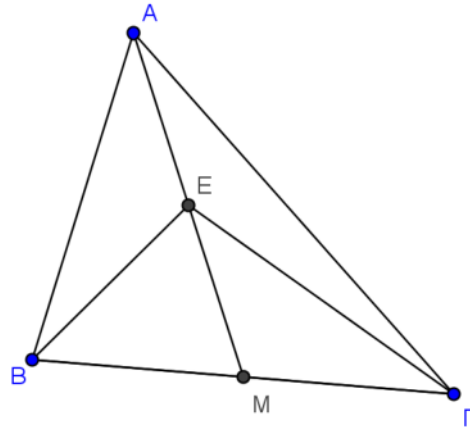
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma = 2 BE$ να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{AEB} = \hat{EM\Gamma}$

(Μονάδες 12)

β) $AB = E\Gamma$.

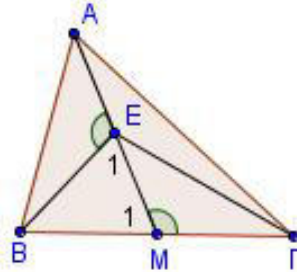
(Μονάδες 13)



α) Είναι $BM = \frac{BG}{2} = \frac{2BE}{2} = BE$, άρα το τρίγωνο BEM είναι

ισοσκελές και έχει $\hat{E}_1 = \hat{M}_1$.

Όμως $\hat{AEB} = 180^\circ - \hat{E}_1$ και $\hat{EMG} = 180^\circ - \hat{M}_1$, άρα $\hat{AEB} = \hat{EMG}$.



β) Τα τρίγωνα AEB και EMG έχουν:

- $AE = EM$, διότι E μέσο του AM
- $BE = BM = MG$
- $\hat{AEB} = \hat{EMG}$
- Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα AEB και EMG είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = EG$ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $\hat{AEB} = \hat{EMG}$.

ΘΕΜΑ 2

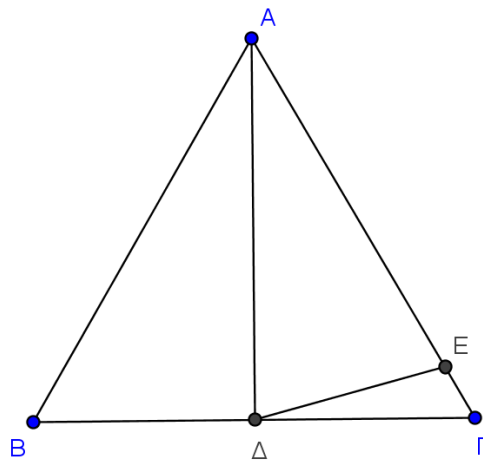
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 30^\circ$.

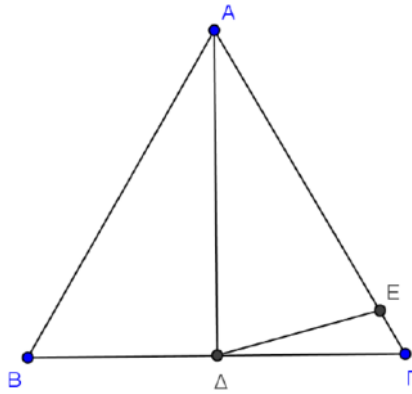
Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$. (Μονάδες 8)





α) Επειδή $AB = AG$, το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος AD είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου.

Επειδή η AD είναι διχοτόμος του τριγώνου $ABΓ$, είναι $\widehat{AΔΓ} = \widehat{BΔΔ} = 30^\circ$, οπότε $\widehat{A} = 60^\circ$.

Ισχύει ότι:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \widehat{B} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 60^\circ$$

Για το τρίγωνο $ABΓ$ ισχύει $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή $AD = AE$ το τρίγωνο $AΔΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{AΔΕ} = \widehat{AΕΔ}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AΔΕ$, έχουμε:

$$\widehat{AΔΓ} + \widehat{AΔΕ} + \widehat{AΕΔ} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2\widehat{AΔΕ} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AΔΕ} = 75^\circ = \widehat{AΕΔ}$$

γ) $\widehat{EΔΓ} = \widehat{AΔΓ} - \widehat{AΔΕ} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$

ΘΕΜΑ 2

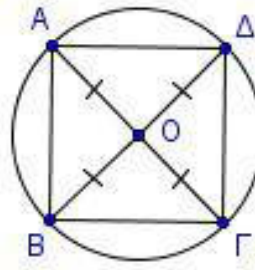
Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $ΑΓ$ και $ΒΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ ώστε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

α) Αν ρ η ακτίνα του κύκλου τότε: $OA = OB = OG = OD = \rho$.

Τελικά οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες
αφού $AG = BD = 2\rho$, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.



β) Ένα ορθογώνιο είναι τετράγωνο, όταν είναι και ρόμβος γι' αυτό πρέπει οι
διάμετροι ΑΓ και ΒΔ να είναι και κάθετες.

ΘΕΜΑ 2

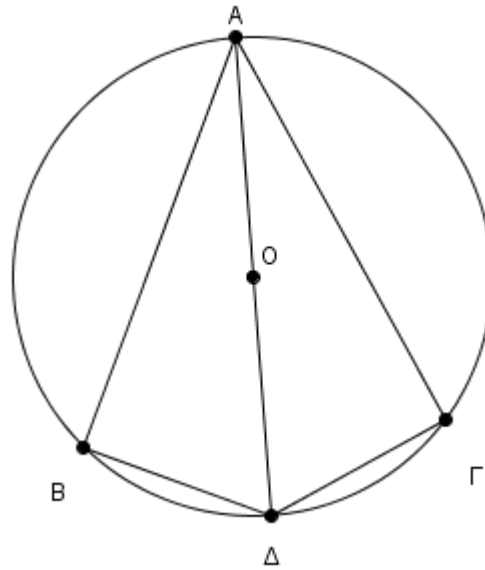
Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Αν η διάμετρος AD είναι διχοτόμος της γωνίας BAG , να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ είναι ίσα.

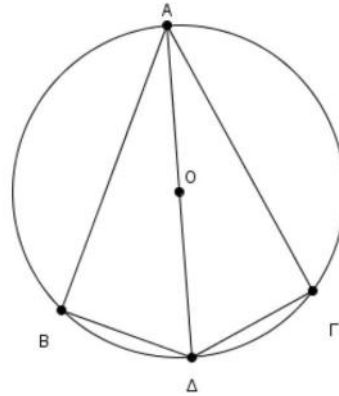
(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)



α) Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ είναι $\widehat{BAD} = \widehat{DAG}$. Οι ίσες γωνίες $\widehat{BAD}$ και $\widehat{DAG}$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στα τόξα ΒΔ και ΔΓ, οπότε και τα τόξα αυτά είναι ίσα.



β) Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{AB\Delta}$ και $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι ορθές διότι βαίνουν σε ημικύκλιο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{BAD} = \widehat{DAG}$, διότι ΑΔ διχοτόμος της $\widehat{BA\Gamma}$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και τις διαμέσους του BK και $\Gamma\Lambda$, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Θ .

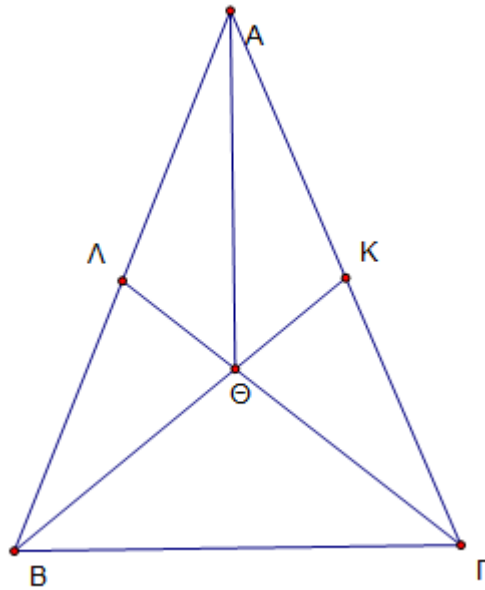
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διάμεσοι BK και $\Gamma\Lambda$ είναι ίσες.

(Μονάδες 12)

β) Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Gamma\Theta$ είναι ίσα

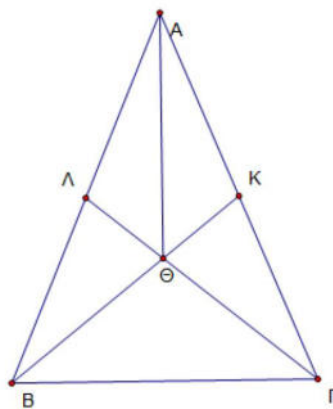
(Μονάδες 13)



α) Τα τρίγωνα $\Lambda\text{B}\Gamma$ και $\text{K}\text{B}\Gamma$ έχουν:

- $\text{B}\Gamma$ κοινή πλευρά
- $\text{B}\Lambda = \Gamma\text{K}$, ως μισά των ίσων πλευρών AB και $\text{A}\Gamma$
- $\widehat{\text{B}} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $\text{AB}\Gamma$.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $\Lambda\text{B}\Gamma$ και $\text{K}\text{B}\Gamma$ είναι ίσα, οπότε έχουν και $\text{BK} = \Gamma\Lambda$ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $\widehat{\text{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$.



β) Από την ισότητα των τριγώνων $\Lambda\text{B}\Gamma$ και $\text{K}\text{B}\Gamma$ προκύπτει $\widehat{\text{B}\Theta\Gamma} = \widehat{\Gamma\Theta\text{B}}$ ως απέναντι γωνίες στις ίσες πλευρές $\text{B}\Lambda$ και ΓK . Τότε το τρίγωνο $\Theta\text{B}\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $\text{B}\Gamma$ οπότε $\text{OB} = \text{O}\Gamma$.

Τα τρίγωνα $\text{AB}\Theta$ και $\text{A}\Theta\Gamma$ έχουν:

- $\text{AB} = \text{A}\Gamma$
- $\text{OB} = \text{O}\Gamma$
- $\text{A}\Theta$ κοινή

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα $\text{AB}\Theta$ και $\text{A}\Theta\Gamma$ είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 2

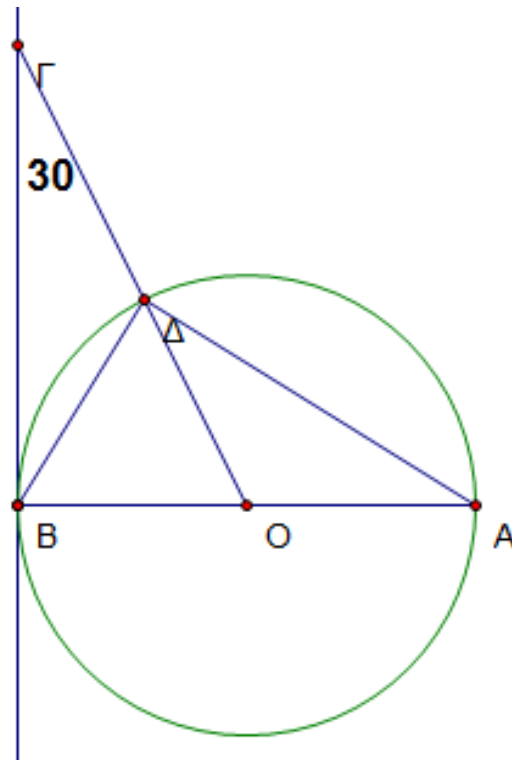
Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και διάμετρό του AB . Στην εφαπτομένη του κύκλου στο B θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία BGO να είναι ίση με 30° . Αν η $O\Gamma$ τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

α) $O\Gamma = 2OA$.

(Μονάδες 12)

β) $B\Gamma = A\Delta$.

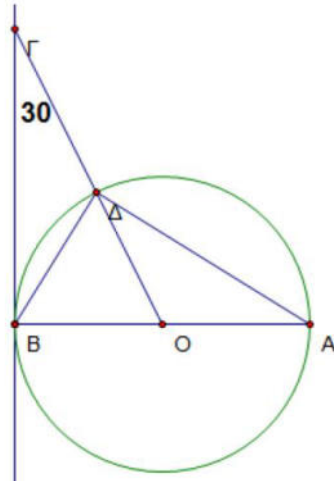
(Μονάδες 13)



α) Η εφαπτομένη ΒΓ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΒ στο σημείο επαφής, άρα $\widehat{\Gamma\hat{B}O} = 90^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ είναι $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$, άρα $OB = \frac{OG}{2} \Leftrightarrow OG = 2OB$ επειδή

$OB = OA = \rho$ έχουμε $OG = 2OA$



β) Είναι $\widehat{B\hat{A}A} = 90^\circ$ διότι είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΒΓ και ΑΒΔ έχουν:

- $OG = AB$, διότι $OG = 2OA = 2\rho$ και $AB = 2\rho$

- $\widehat{B\hat{G}O} = \widehat{B\hat{A}A} = 30^\circ$

$\widehat{\Delta\hat{O}B} = 60^\circ$ η οποία είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΟΑ ($OA=OD$) οπότε

$$\widehat{B\hat{A}A} = \frac{\widehat{\Delta\hat{O}B}}{2} = 30^\circ$$

- Άρα τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα οπότε ισχύει $B\Gamma = A\Delta$ επειδή έχουν τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

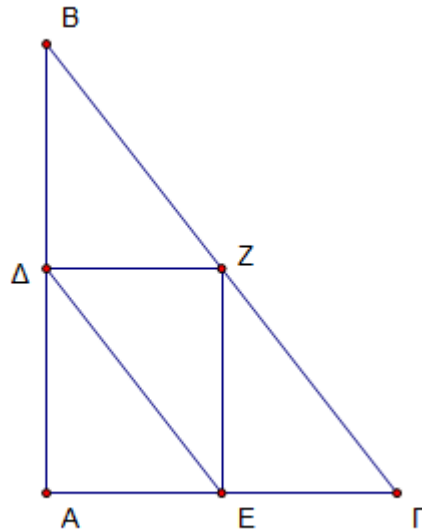
ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

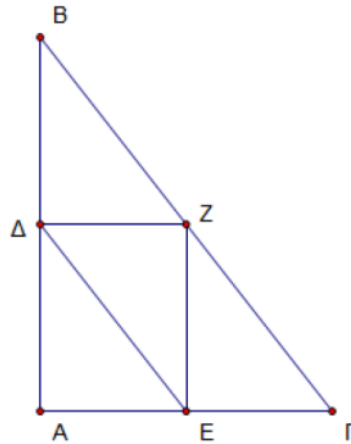
β) Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 13)



α) Επειδή το ΔΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι

$$\Delta Z // A\Gamma \Leftrightarrow \Delta Z // A E \text{ και } \Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = A E$$

Άρα στο τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι $\Delta Z // A E$, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή όμως $\hat{A} = 90^\circ$, το ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο.



β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ άρα $\Delta E // B\Gamma$. Οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Α, άρα δεν είναι παράλληλες. Οπότε το ΕΔΒΓ είναι τραπέζιο.

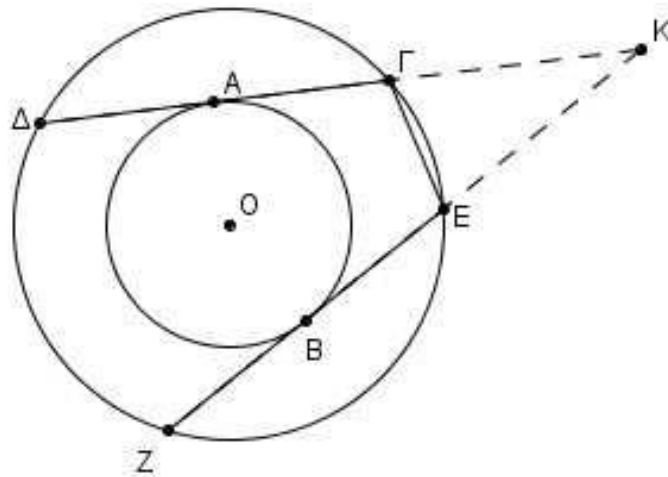
Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, έχει $AB = A\Gamma$, άρα και $\Delta B = E\Gamma$ γιατί είναι μισά των ΑΒ, ΑΓ. Άρα το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

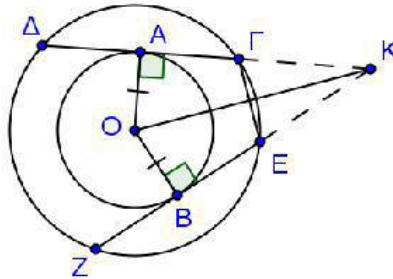
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$. (12 Μονάδες)

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές. (13 Μονάδες)



α) Οι ακτίνες OA και OB του κύκλου (O, ρ) καταλήγουν στα σημεία επαφής με τις εφαπτομένες. Τότε $OA \perp \Gamma\Delta$ και $OB \perp EZ$.

Τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Gamma\Delta$ και EZ στον κύκλο (O, R) και είναι ίσα αφού $OA = OB = \rho$. Άρα και οι χορδές $\Gamma\Delta$ και EZ είναι ίσες



β) Είναι $KA = KB$ (1) ως εφαπτόμενα τμήματα από το K προς τον κύκλο (O, ρ) . Επειδή τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Gamma\Delta$ και EZ , τα σημεία A και B είναι μέσα των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες, είναι και $AG = BE$ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε: $KA - AG = KB - BE$ οπότε $KG = KE$.

Άρα το τρίγωνο KGE είναι ισοσκελές.

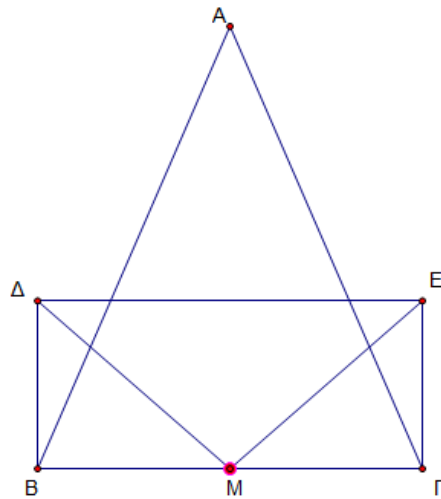
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στα σημεία B και Γ φέρουμε κάθετες στη $B\Gamma$ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα. (Μονάδες 13)

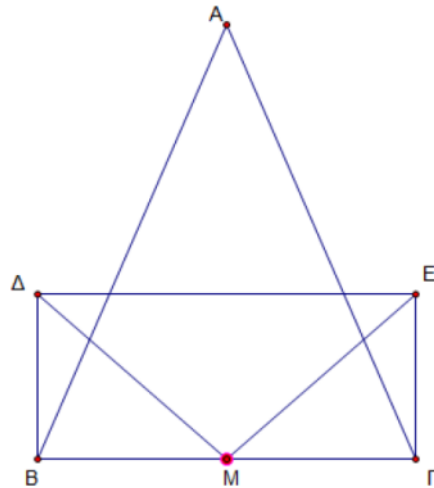
β) Το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle B\Delta M$ και $\triangle M\Gamma E$ έχουν:

- $MB = M\Gamma$, διότι το M είναι μέσο του $B\Gamma$
- $M\Delta = ME$, από υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα $\triangle B\Delta M$ και $\triangle M\Gamma E$ είναι ίσα. Επομένως $B\Delta = \Gamma E$ αφού οι άλλες δύο πλευρές των ίσων τριγώνων είναι ίσες μία προς μία.



β) Είναι $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ άρα $B\Delta \parallel \Gamma E$. Ισχύει ακόμη $B\Delta = \Gamma E$, διότι τα τρίγωνα $\triangle B\Delta M$ και $\triangle M\Gamma E$ είναι ίσα. Άρα στο τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\widehat{\Delta B \Gamma} = 90^\circ$, τότε το τετράπλευρο $\triangle B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

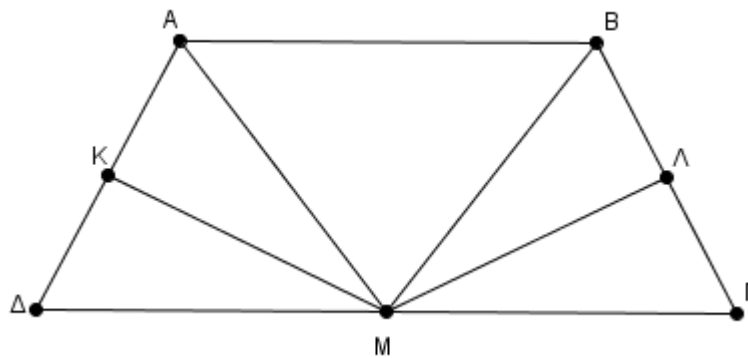
Να αποδείξετε ότι:

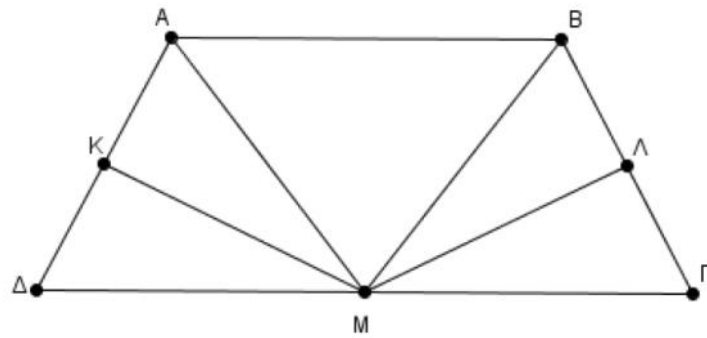
α) Τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.

(Μονάδες 13)





α) Τα τρίγωνα ΚΔΜ και ΛΜΓ έχουν:

- $ΔΜ = ΜΓ$ διότι Μ μέσο της $ΓΔ$
- $ΚΔ = ΛΓ$ ως μισά των ίσων πλευρών $ΑΔ$ και $ΒΓ$
- $\hat{Δ} = \hat{Γ}$ ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου.

Σύμφωνα με το κριτήριο $\Pi - Γ - \Pi$ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΚΜ = ΛΜ$ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $\hat{Δ}$ και $\hat{Γ}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν:

- $ΜΔ = ΜΓ$
- $\hat{Δ} = \hat{Γ}$
- $ΑΔ = ΒΓ$

Σύμφωνα με το κριτήριο $\Pi - Γ - \Pi$ τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ είναι ίσα, οπότε ισχύει $ΑΜ = ΒΜ$ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $\hat{Δ}$ και $\hat{Γ}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $\chi\Lambda\gamma$ και η διχοτόμος της $\Lambda\delta$. Από τυχαίο σημείο B της $\Lambda\chi$ φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $\Lambda\delta$ στο Δ και την $\Lambda\gamma$ στο Γ .

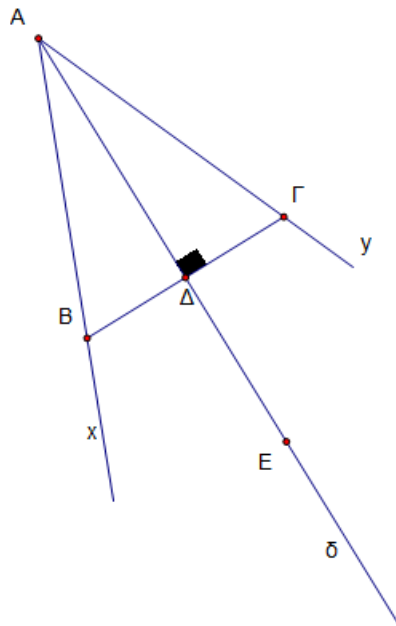
Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τμήματα ΛB και $\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

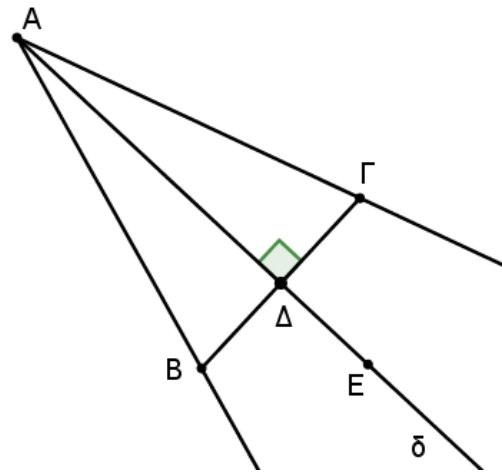
β) Το τυχαίο σημείο E της $\Lambda\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .

(Μονάδες 13)



α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AD είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$. Άρα $AB = A\Gamma$

β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές οπότε η AD , εκτός από διχοτόμος και ύψος, είναι και διάμεσος, δηλαδή η AD είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$. Το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετη του $B\Gamma$ άρα ισαπέχει από τα σημεία B και Γ .



ΘΕΜΑ 2

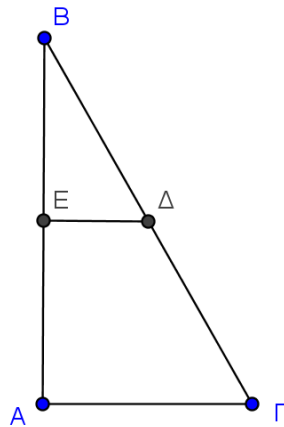
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta=1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) $A\Gamma$ (Μονάδες 8)

β) $B\Gamma$ (Μονάδες 9)

γ) $A\Delta$ (Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



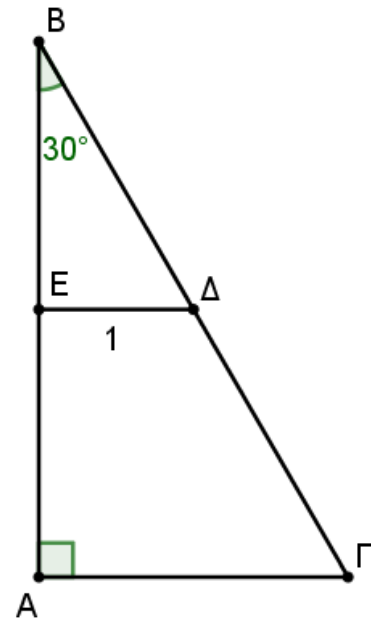
α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ισχύει:

$$\Delta E = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = 2$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 30^\circ$, άρα ισχύει ότι:

$$A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 4$$

γ) Η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, επομένως ισχύει ότι: $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$



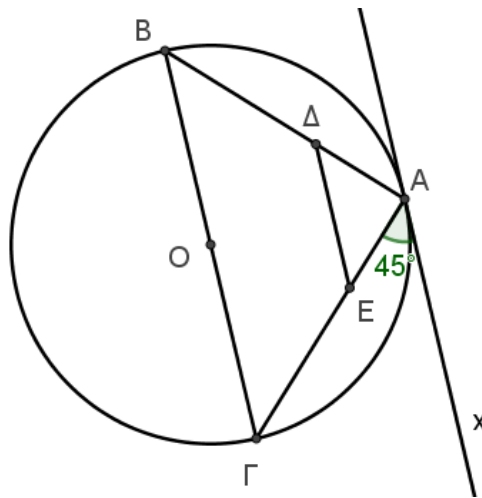
ΘΕΜΑ 2

Σε σημείο A ενός κύκλου, φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου Ax και τη χορδή AG που σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία 45° . Φέρουμε τη διάμετρο GB και μια παράλληλη ευθεία στη $BΓ$ που τέμνει την AB στο Δ και την AG στο E .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $BAΓ$. (Μονάδες 10)

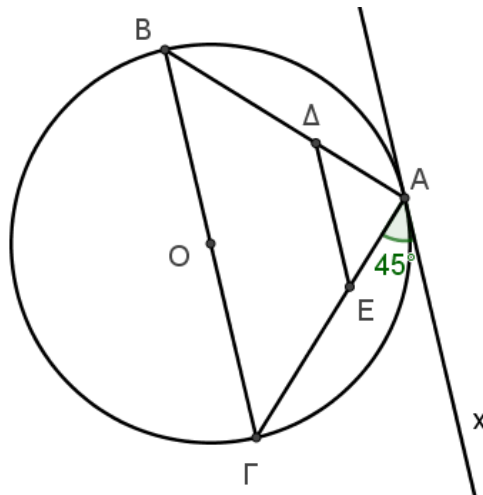
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BΓΕΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 15)



α) Είναι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Ακόμη η γωνία $\widehat{\Gamma\hat{A}x}$ σχηματίζεται από την εφαπτομένη Ax και τη χορδή AG άρα είναι ίση με τη γωνία που βαίνει στο τόξο $\widehat{AG}$. Επομένως ισχύει: $\widehat{B} = \widehat{\Gamma\hat{A}x} = 45^\circ$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ βρίσκουμε $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 45^\circ$



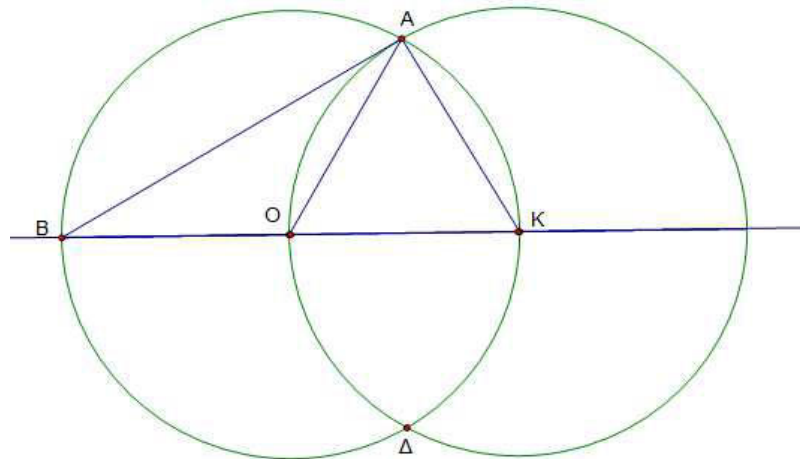
β) Το $B\Gamma E\Delta$ είναι τραπέζιο γιατί $DE \parallel B\Gamma$ και οι πλευρές $B\Delta$ και ΓE τέμνονται στο A , άρα δεν είναι παράλληλες. Επίσης, έχει τις γωνίες που πρόσκεινται στη βάση $B\Gamma$ ίσες, άρα είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 2

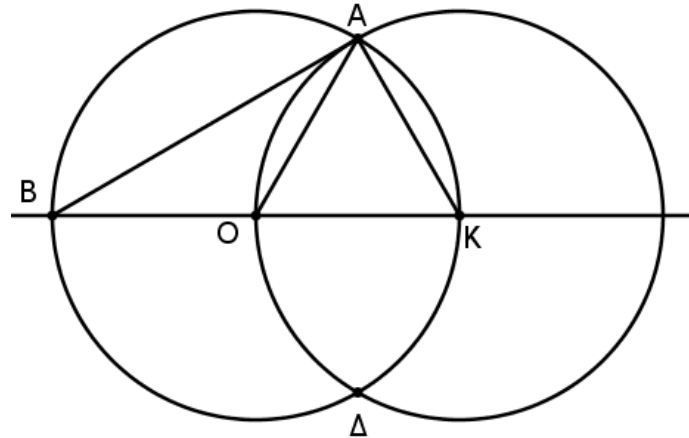
Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK . (Μονάδες 15)



α) Είναι $OA = OK = \rho$, ως ακτίνες του κύκλου (O, ρ) . Ισχύει επίσης ότι $KA = \rho$ ως ακτίνα του κύκλου (K, ρ) . Άρα $OA = OK = KA = \rho$. Άρα το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.



β) Επειδή OAK ισόπλευρο τρίγωνο είναι $\widehat{BKA} = 60^\circ$. Επίσης $\widehat{BAK} = 90^\circ$, διότι είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ημικύκλιο $\widehat{B\Delta K}$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου BAK βρίσκουμε:

$$\widehat{BAK} + \widehat{BKA} + \widehat{ABK} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \widehat{ABK} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABK} = 30^\circ$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα τμήματα $ΑΓ=ΒΔ$ που τέμνονται στο σημείο $Ο$ έτσι ώστε $ΟΑ=ΟΒ$, και τα σημεία $Η$ και $Ζ$ στα τμήματα $ΑΓ$ και $ΒΔ$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΟΗ=ΟΖ$.

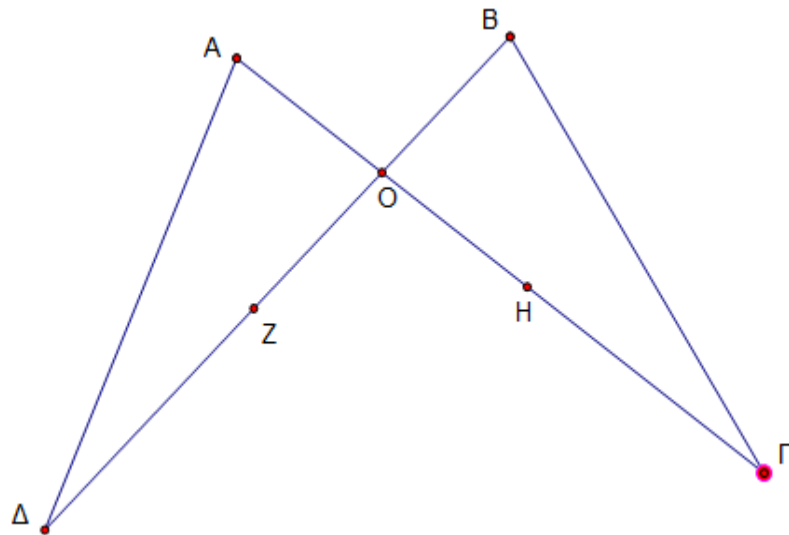
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $\hat{ΑΔΟ}$ και $\hat{ΒΓΟ}$ είναι ίσες.

(Μονάδες 12)

β) $ΑΖ=ΒΗ$.

(Μονάδες 13)



α) Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και $OB\Gamma$ έχουν:

- $OA = OB$
- $OD = OG$ ($AG = BD$ και $OA = OB$,
οπότε

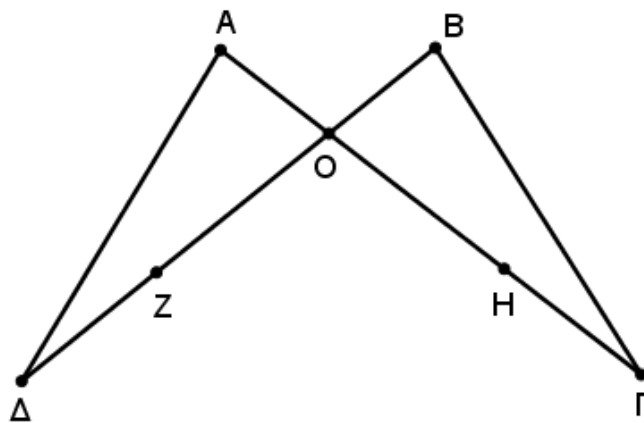
$$AG - OA = BD - OB \Leftrightarrow OD = OG)$$

- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ ως κατακορυφήν.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε

ότι τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και $OB\Gamma$ είναι ίσα,

άρα $\widehat{A\Delta O} = \widehat{B\Gamma O}$ αφού είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές OA και OB .



β) Τα τρίγωνα OAZ και OBH έχουν:

- $OA = OB$
- $OH = OZ$
- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, ως κατακορυφήν

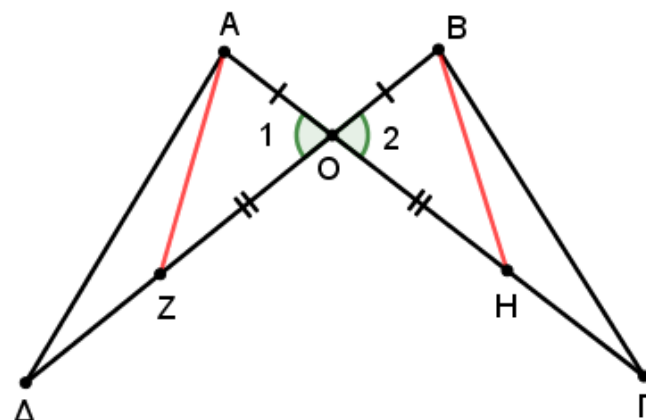
Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι

τα τρίγωνα OAZ και OBH είναι ίσα, οπότε

έχουν και $AZ = BH$ ως πλευρές που

βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{O}_1$

και $\widehat{O}_2$.



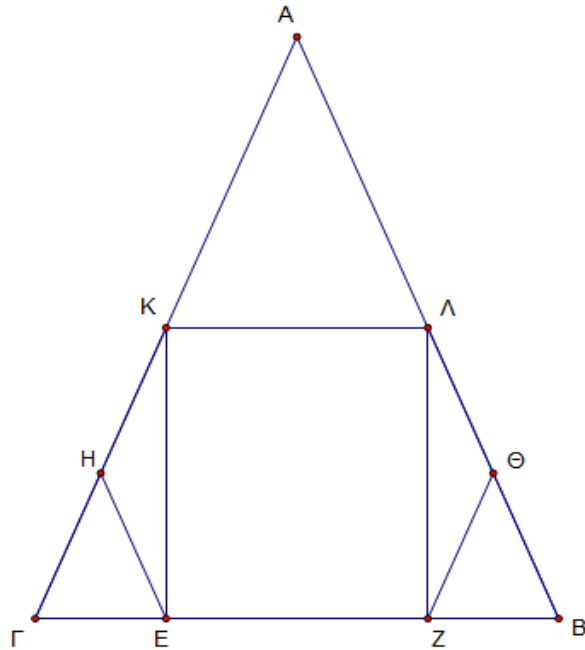
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών AG και AB αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\triangle KE\Gamma$ και $\triangle \Lambda ZB$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

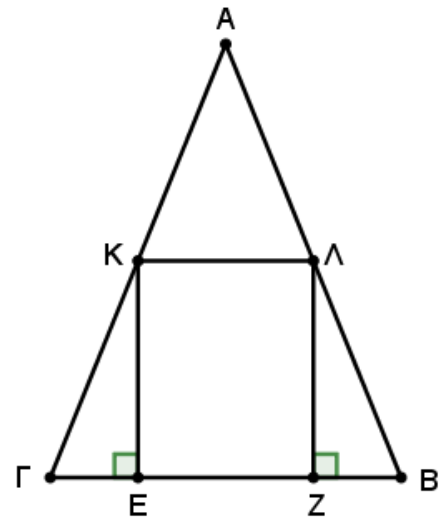
β) $EH=Z\Theta$, όπου H , Θ τα μέσα των τμημάτων $K\Gamma$, ΛB αντίστοιχα. (Μονάδες 10)



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ έχουν:

- $ΚΓ = ΚΒ$, ως μισά των ίσων πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$.

Άρα τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα.



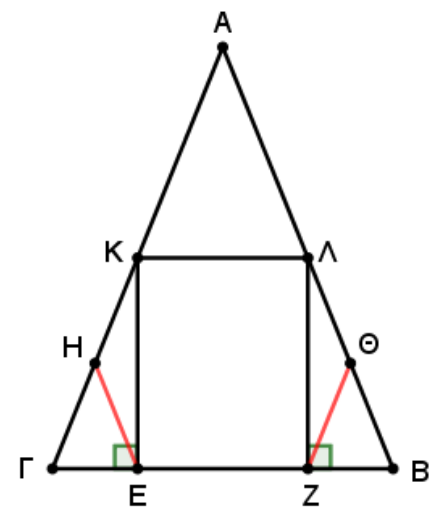
β) Η ΕΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΚΕΓ, οπότε

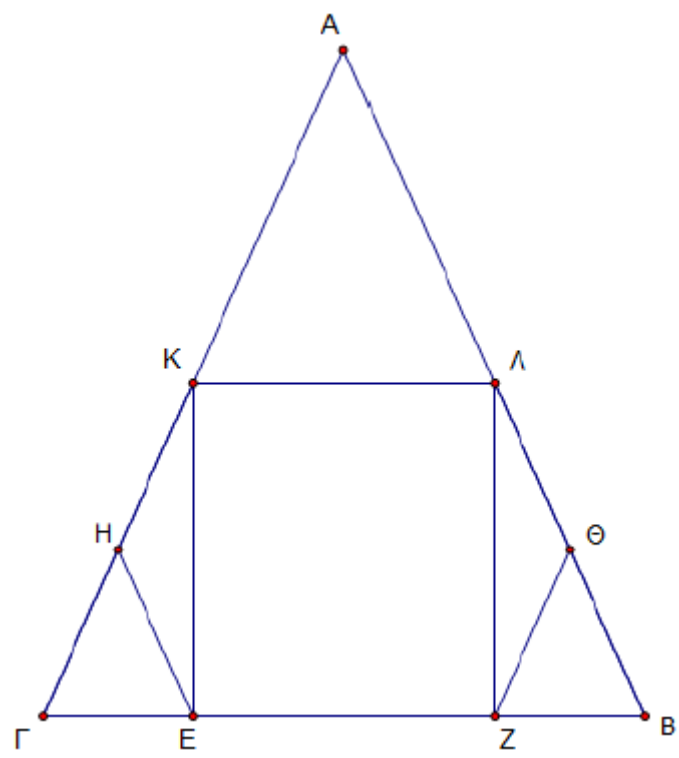
$$\text{ισχύει: } ΕΗ = \frac{ΚΓ}{2}$$

Η ΖΘ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΛΖΒ, άρα

$$ΖΘ = \frac{ΛΒ}{2}$$

Επειδή $ΚΓ = ΛΒ$, είναι και $ΕΗ = ΖΘ$.





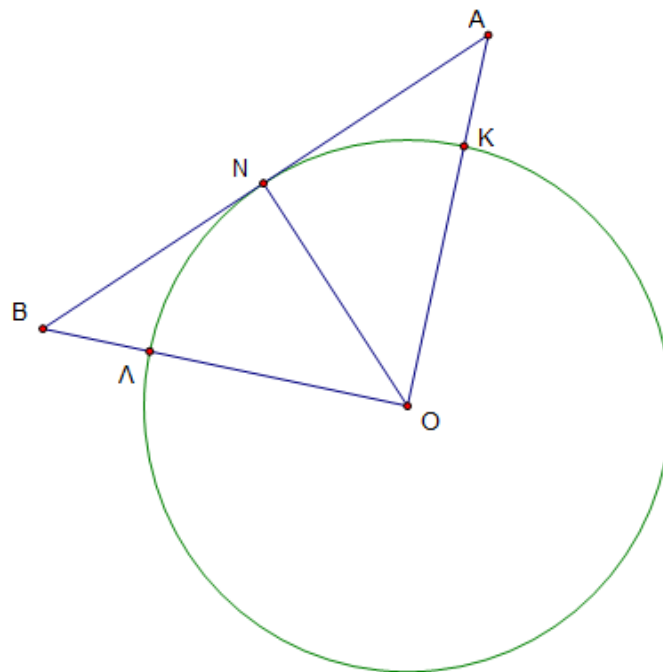
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA=NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\triangle AOB$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου KL . (Μονάδες 12)

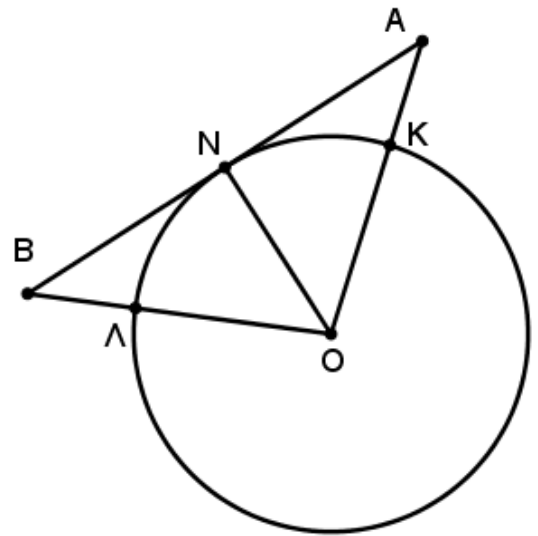


α) Στο τρίγωνο OAB η ON είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο OAB η διάμεσος ON είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{O}$. Άρα $\widehat{KON} = \widehat{NOL}$.

Επειδή οι επίκεντρες γωνίες είναι ίσες, θα είναι και τα αντίστοιχα τόξα τους ίσα.

Δηλαδή $\widehat{KN} = \widehat{NL}$. Άρα το N είναι μέσο του τόξου $\widehat{KL}$.

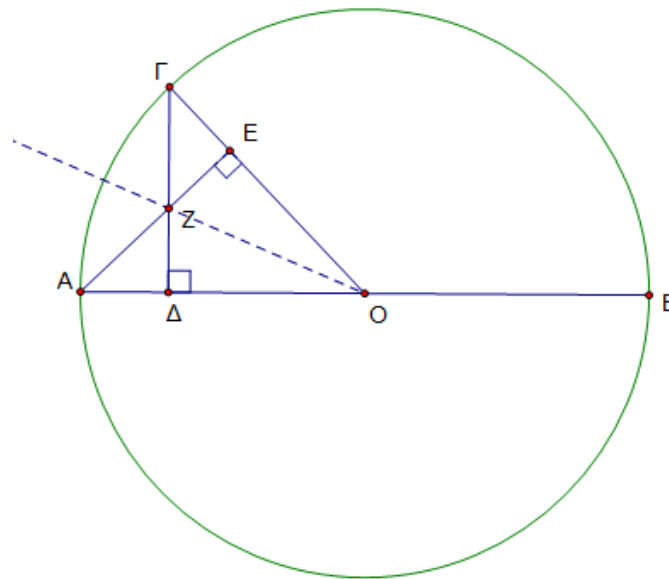


ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\triangle \hat{O}E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Η OZ διχοτομεί τη γωνία $\angle \hat{A}O\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου AG . (Μονάδες 12)



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΟ και ΓΔΟ έχουν:

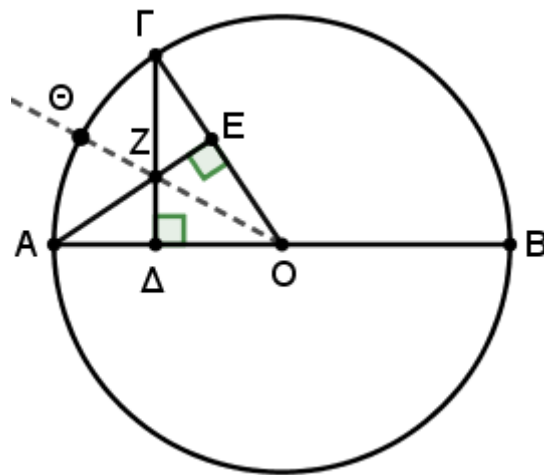
- $OA = OG$ ως ακτίνες κύκλου
- $\widehat{O}$ κοινή γωνία,

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΟ και ΓΔΟ είναι ίσα, οπότε έχουν και $OD = OE$ γιατί έχουν τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΟ και ΖΕΟ έχουν:

- $OD = OE$, από το ερώτημα (α)
- OZ κοινή πλευρά,

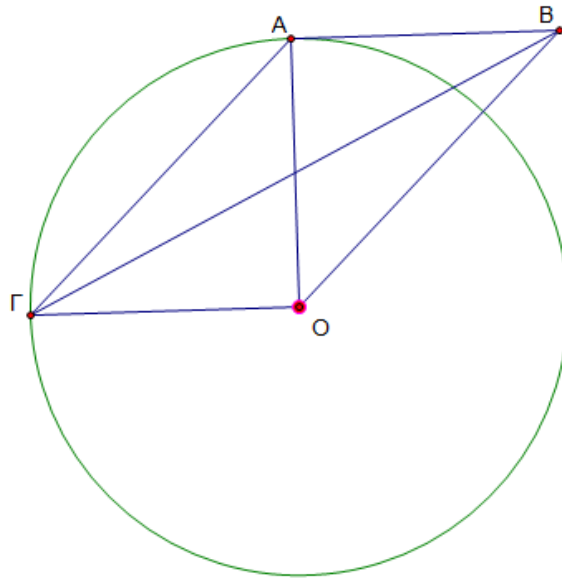
Άρα τα τρίγωνα ΖΔΟ και ΖΕΟ είναι ίσα, οπότε έχουν και $\widehat{OZD} = \widehat{OZE}$ αφού έχουν τις προσκείμενες πλευρές τους ίσες μία προς μία, δηλαδή η OZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AOG}$. Οι γωνίες $\widehat{AOZ}$ και $\widehat{GOZ}$ είναι επίκεντρες και ίσες, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα $\widehat{AZ}$ και $\widehat{GZ}$ είναι ίσα, άρα το Z είναι μέσο του τόξου $\widehat{AG}$.



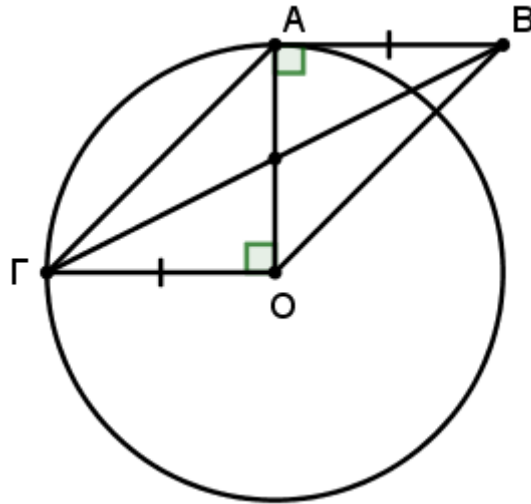
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA , OG και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB με $AB = OG$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $BΓ$ διχοτομούνται. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABOG$. (Μονάδες 15)



α) Η OA είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη AB ,
 οπότε $OA \perp AB$. Επίσης $OA \perp OG$ από υπόθεση, άρα $AB \parallel OG$. Επειδή $AB \parallel OG$ και
 $AB = OG$, τότε το τετράπλευρο $ABOG$ είναι παραλληλόγραμμο. Οι AO και BG είναι
 διαγώνιες του παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.



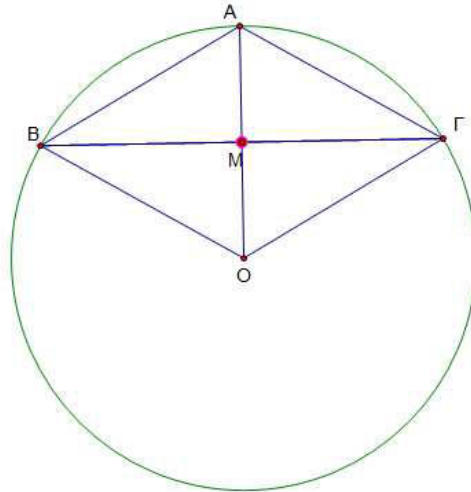
β) Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές επειδή $OA = AB = r$. Τότε
 $\hat{B} = \hat{BOA} = 45^\circ$ και $\hat{B} = \hat{O\Gamma A} = 45^\circ$ διότι είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.
 Είναι $\hat{BO\Gamma} = \hat{BOA} + \hat{AOG} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ και $\hat{G\hat{A}B} = \hat{BO\Gamma} = 135^\circ$ διότι είναι απέναντι
 γωνίες παραλληλογράμμου.

ΘΕΜΑ 2

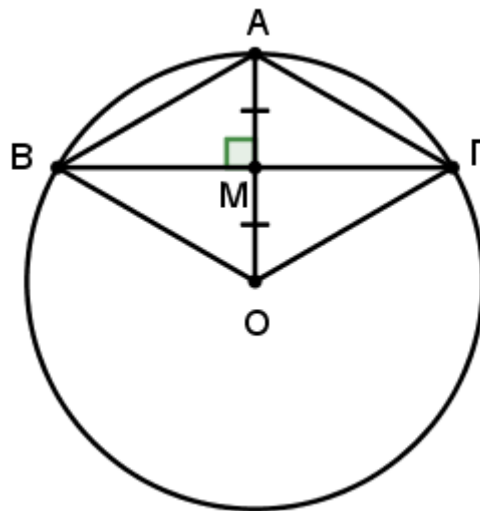
Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε την ακτίνα OA και τη χορδή $B\Gamma$ κάθετη στην OA στο μέσο της M .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma OB$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Gamma OB$. (Μονάδες 15)



α) Επειδή $OM \perp BG$, το OM είναι απόστημα της χορδής $BΓ$, οπότε το M είναι μέσο της. Από υπόθεση το M είναι μέσο και της OA . Άρα τα τμήματα OA και $BΓ$ του $ΑΓΟΒ$ διχοτομούνται. Αυτό σημαίνει ότι το $ΑΓΟΒ$ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον $OA \perp BΓ$, δηλαδή οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $ΑΓΟΒ$ είναι κάθετες. Άρα το $ΑΓΟΒ$ είναι ρόμβος.



β) Στο τρίγωνο BOA η BM είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε $BO = BA$. Τότε $OA = BO = BA = \rho$, οπότε το τρίγωνο BOA είναι ισόπλευρο και επομένως ισχύει $\widehat{BOA} = \widehat{BAO} = \widehat{OBA} = 60^\circ$.

Όμοια, το $ΓΜ$ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου $ΟΓΑ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $OA = OΓ = \rho$. Τότε $OA = OΓ = ΓΑ = \rho$, οπότε το τρίγωνο $ΓΟΑ$ είναι ισόπλευρο και επομένως ισχύει $\widehat{ΓΟΑ} = \widehat{ΓΑΟ} = \widehat{ΟΓΑ} = 60^\circ$.

Είναι $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ = \widehat{B\hat{A}\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 2

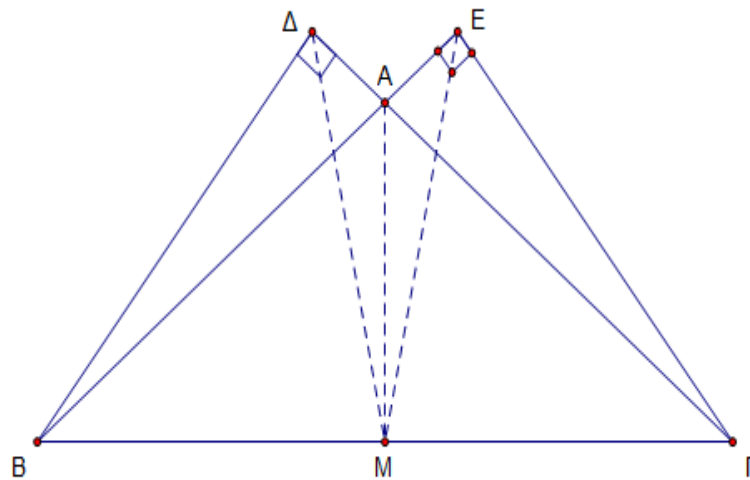
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\widehat{A} > 90^\circ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρνουμε τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 10)

β) Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$. (Μονάδες 8)

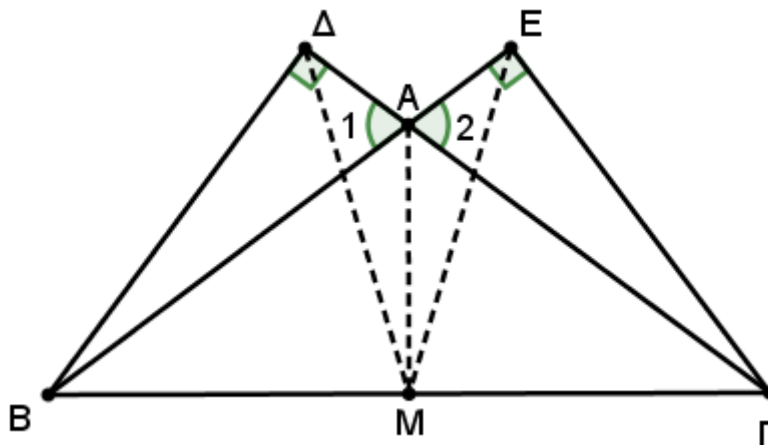
ii. Να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία $\angle \Delta ME$ (Μονάδες 7)



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ έχουν:

- $AB=AG$ κοινή πλευρά
- $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ίσα, οπότε έχουν και $BD = GE$ ως πλευρές που έχουν τις απέναντι γωνίες $\widehat{A_1}$ και $\widehat{A_2}$ ίσες .



β) Το ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου

τρίγωνα ΔΒΓ, άρα $DM = \frac{BG}{2}$ (1).

Το ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

ΕΒΓ, άρα $EM = \frac{BG}{2}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $MD = ME$.

Τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ είναι ίσα από το (α) ερώτημα οπότε έχουν $AD = AE$.

Επειδή $MD=ME$ και $AD=AE$, τα Μ και Α ισαπέχουν από τα Δ και Ε, άρα η ΜΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΔΕ, η ΜΑ είναι μεσοκάθετος της βάσης ΔΕ , άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{MDE}$.

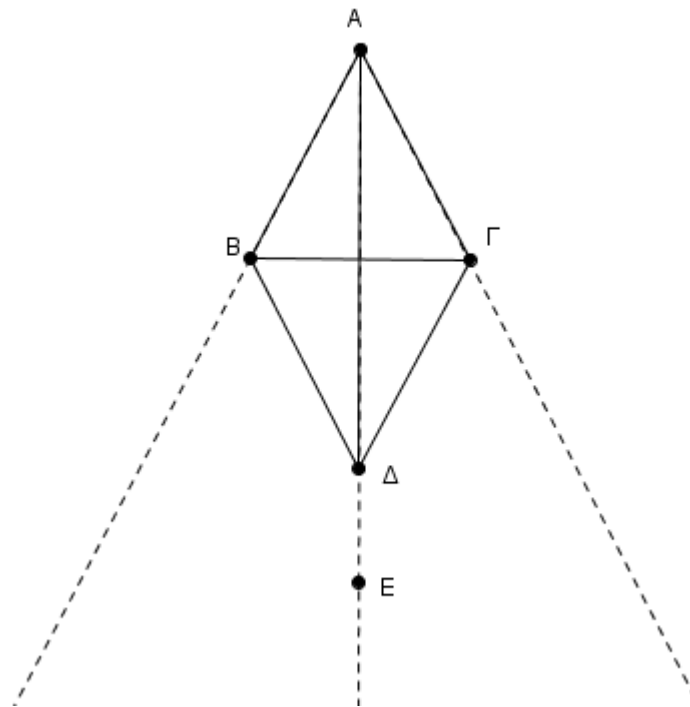
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος $AB\Delta\Gamma$. Στην προέκταση της διαγωνίου $A\Delta$ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο E .

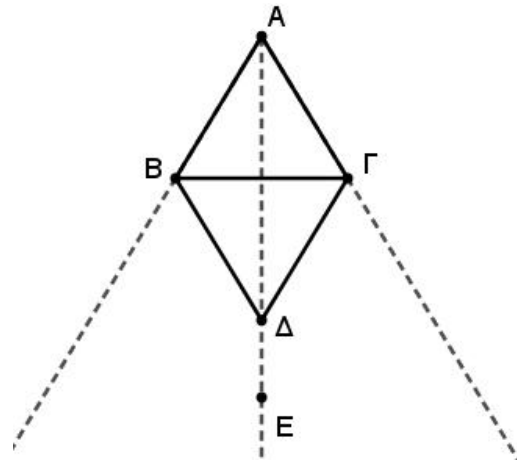
Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ (προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

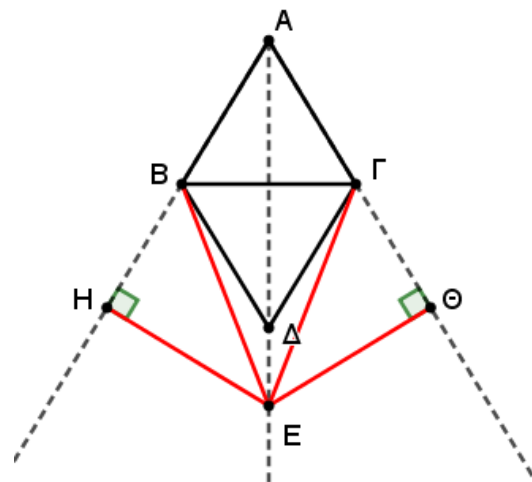
β) Το σημείο E ισαπέχει από τα σημεία B και Γ . (Μονάδες 15)



α) Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του οπότε η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επειδή το E είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας A , ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, δηλαδή ισαπέχει από τις AB και AG .



β) Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα η AD είναι μεσοκάθετος της $BΓ$. Επειδή το E ανήκει στη μεσοκάθετο του $BΓ$, ισαπέχει από τα B και $Γ$.



ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$.

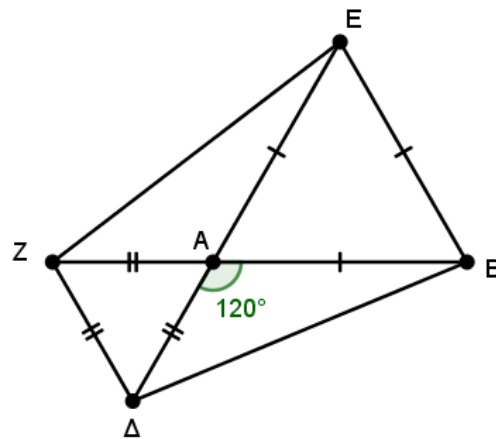
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEB και $AB\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Το τμήμα ΔZ είναι παράλληλο στο BE .

(Μονάδες 12)



α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ έχουν:

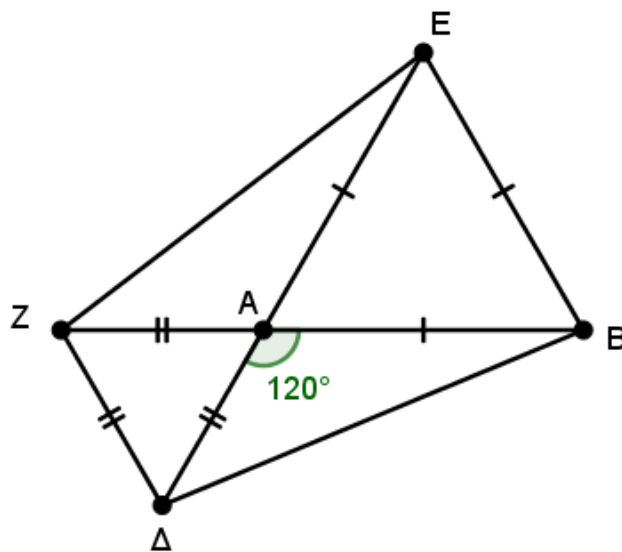
- $AZ = AD$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΖΔ
- $AB = AE$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΕ
- $\widehat{ZAE} = \widehat{DAB}$, ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

β) Είναι $\widehat{AZD} = \widehat{AEB} = 60^\circ$ ως γωνίες ισόπλευρων τριγώνων.

Τα σημεία Δ, Α και Ζ είναι συνευθειακά αφού $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} + \widehat{BAE} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.

Επίσης οι ίσες γωνίες $\widehat{AZD}$, $\widehat{AEB}$ είναι εντός εναλλάξ των ΔΖ και ΒΕ που τέμνονται από την ΔΕ, άρα $\Delta Z \parallel BE$.



ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δυο διαμέτρους του AB και $\Gamma\Delta$.

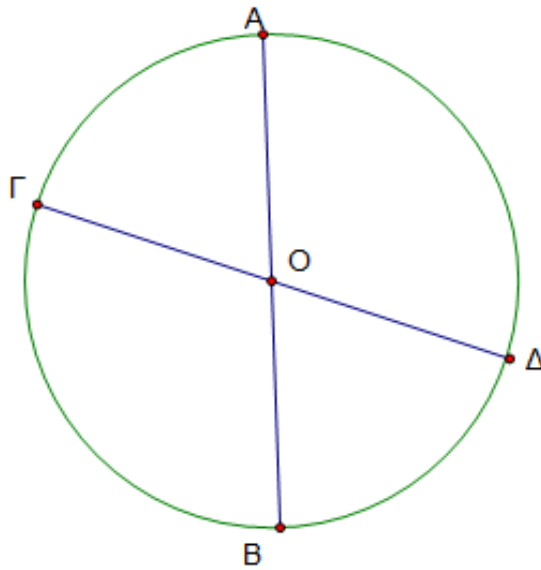
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες.

(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο.

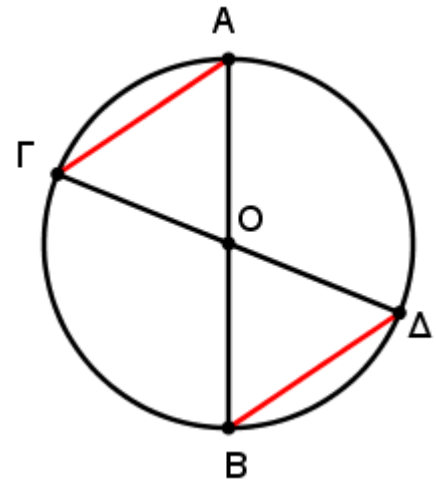
(Μονάδες 12)



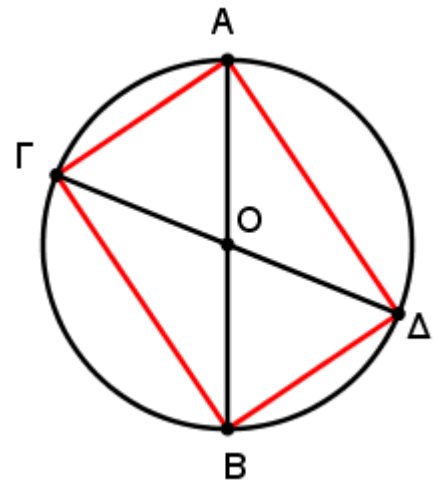
α) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Τα τρίγωνα $ΟΑΓ$ και $ΟΒΔ$ έχουν:

- $ΟΑ = ΟΒ = \rho$
- $ΟΓ = ΟΔ = \rho$
- $\widehat{ΑΟΓ} = \widehat{ΒΟΔ}$ ως κατακορυφήν.

Σύμφωνα με το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΓ = ΒΔ$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{ΑΟΓ}$ και $\widehat{ΒΟΔ}$.



β) Επειδή $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = \rho$, οι διαγώνιες $ΑΒ, ΓΔ$ του τετραπλεύρου $ΑΓΒΔ$ διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.



ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG . Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

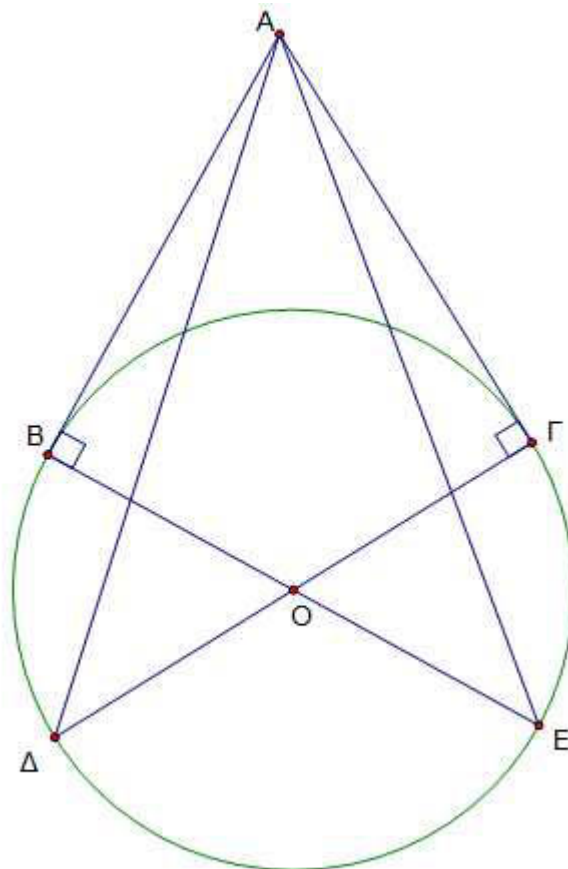
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

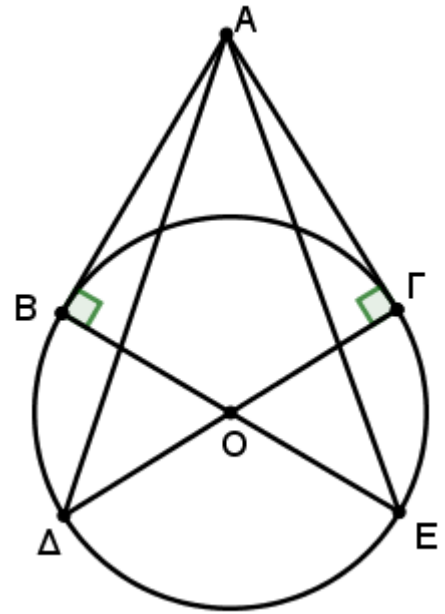


α) Είναι $\widehat{ABE} = \widehat{A\Gamma\Delta} = 90^\circ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και AΓΔ έχουν:

- $AB = A\Gamma$, ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν
- $BE = \Gamma\Delta = 2\rho$

Άρα τα τρίγωνα ABE και AΓΔ είναι ίσα.

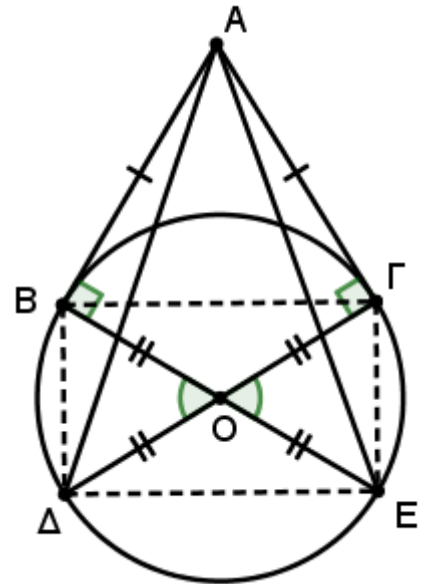


β) $\widehat{B\hat{O}\Delta} = \widehat{G\hat{O}E}$ ως κατακορυφήν γωνίες, άρα $\widehat{\Delta B} = \widehat{E\Gamma} \Leftrightarrow \Delta B = E\Gamma$.

Τα τρίγωνα ABD και AGE έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $AD = AE$, αφού τα τρίγωνα ABE και AΓΔ είναι ίσα ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων,
- $BD = \Gamma E$

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

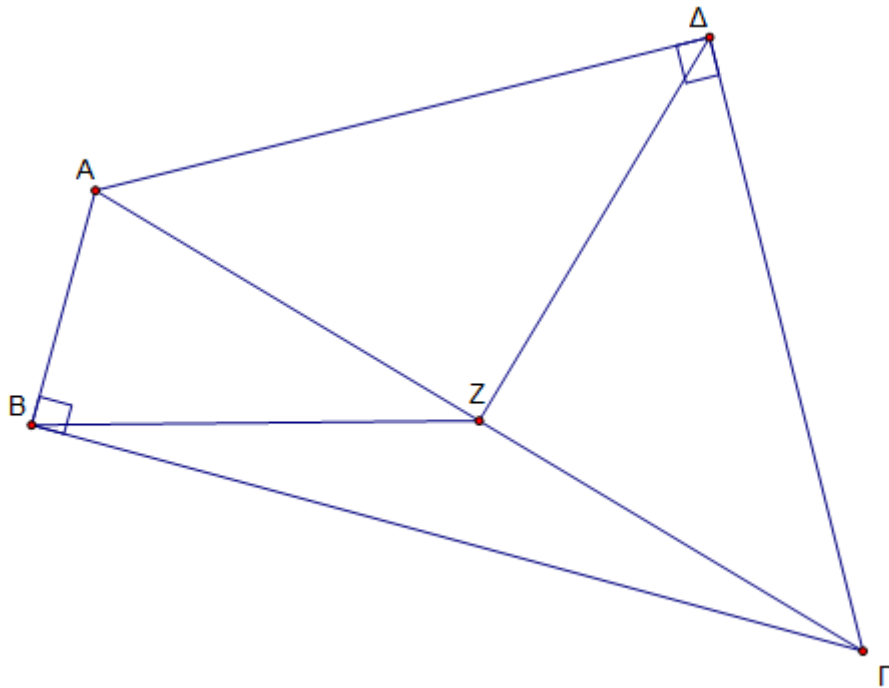


ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\angle B = 90^\circ$ και Z το μέσο του $A\Gamma$. Με υποτείνουσα το $A\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle A\Delta\Gamma$ με $\angle \Delta = 90^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\angle A\Gamma B = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\angle B\Delta\Gamma$ και $\angle B\Gamma\Delta$. (Μονάδες 12)



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η BZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου, άρα $BZ = \frac{A\Gamma}{2}$ (1).

Η DZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

$A\Delta\Gamma$, άρα $DZ = \frac{A\Gamma}{2}$ (2).

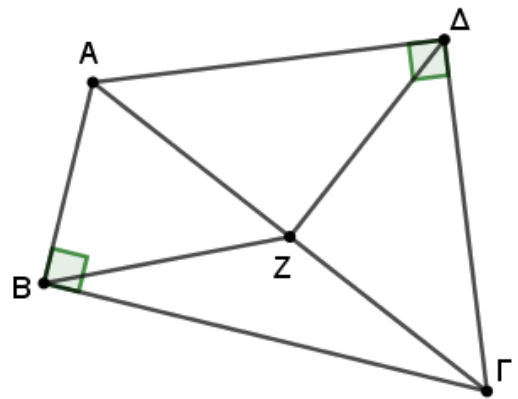
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $BZ = DZ$.

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ βρίσκουμε:

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{A}\Gamma} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$$

Επειδή το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45° , δηλαδή $\widehat{D\hat{A}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}D} = 45^\circ$. Τότε:

$$\widehat{B\hat{A}D} = \widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{D\hat{A}\Gamma} = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ \text{ και } \widehat{B\hat{\Gamma}D} = \widehat{A\hat{\Gamma}B} + \widehat{A\hat{\Gamma}D} = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

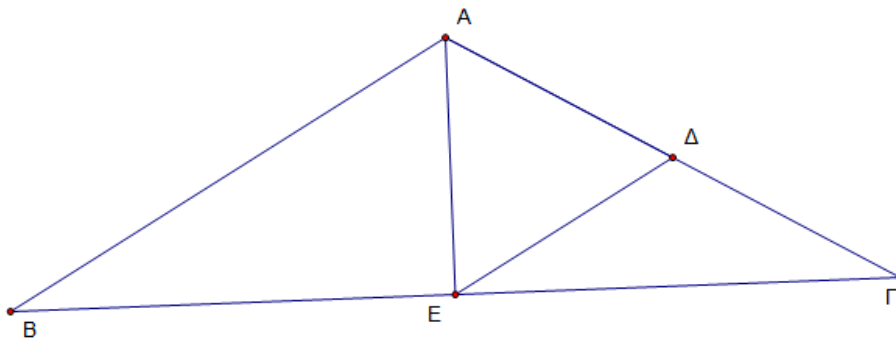


ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, και γωνία $\hat{B}$ ίση με 30° . Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

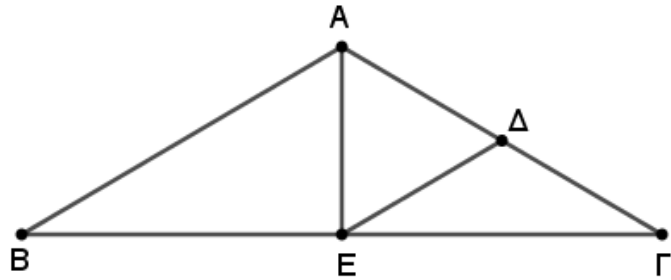


α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ οπότε

$\Delta E \parallel AB$ και $\Delta E = \frac{AB}{2}$. Ισχύει ότι

$\Delta \Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = \Delta E$ οπότε το τρίγωνο

ΔΕΓ είναι ισοσκελές.



Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 30^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές παίρνουμε $\Delta \hat{E} \Gamma = \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ βρίσκουμε:

$$E\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow E\hat{\Delta}\Gamma + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow E\hat{\Delta}\Gamma = 120^\circ$$

β) Ισχύει $E\Delta = \frac{A\Gamma}{2}$ (1) κι επειδή το Δ είναι μέσο της ΑΓ έχουμε $A\Delta = \frac{A\Gamma}{2}$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ είναι $\Gamma = 30^\circ$ άρα η απέναντι κάθετη ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $A\Gamma = \frac{A\Gamma}{2}$ (3).

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $E\Delta = A\Delta = A\Gamma$ οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

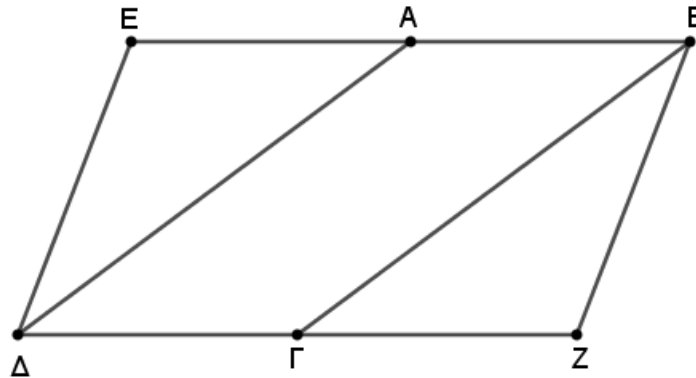
ΘΕΜΑ 2

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα (Μονάδες 13)

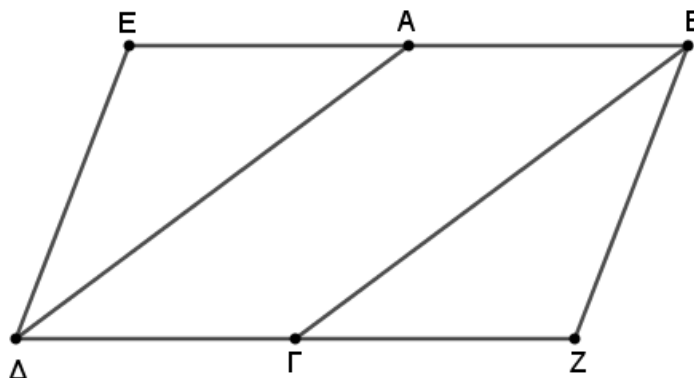
β) Το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



α) Τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle BZG$ έχουν:

- $AD = BG$, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
- $AE = AB = \Gamma\Delta = \Gamma Z$, διότι τα $AB, \Gamma\Delta$ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{E\hat{A}\Delta}$, διότι είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{A}, \widehat{\Gamma}$.

Σύμφωνα με το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle BZG$ είναι ίσα.



β) Από την ισότητα των τριγώνων $\triangle ADE$ και $\triangle BZG$ ισχύει ότι $BZ = ED$ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $\widehat{B\Gamma Z}$ και $\widehat{E\hat{A}\Delta}$.

Ισχύει ότι $BZ = ED$ και $EB = 2AB = 2\Gamma\Delta = \Delta Z$. Οπότε το τετράπλευρο $EBZD$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

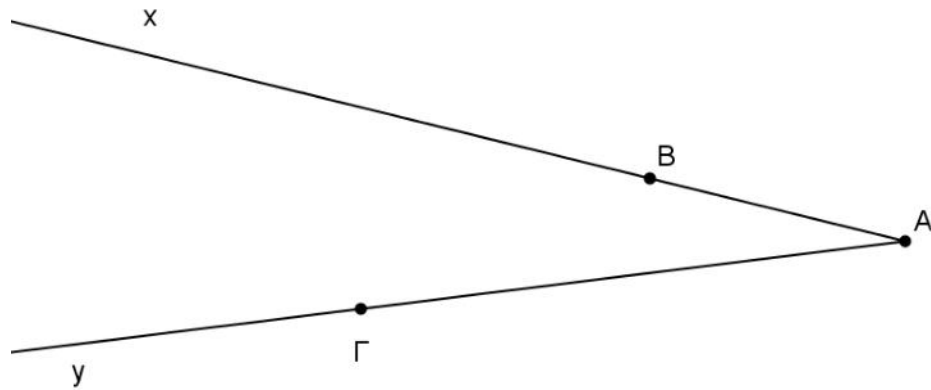
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

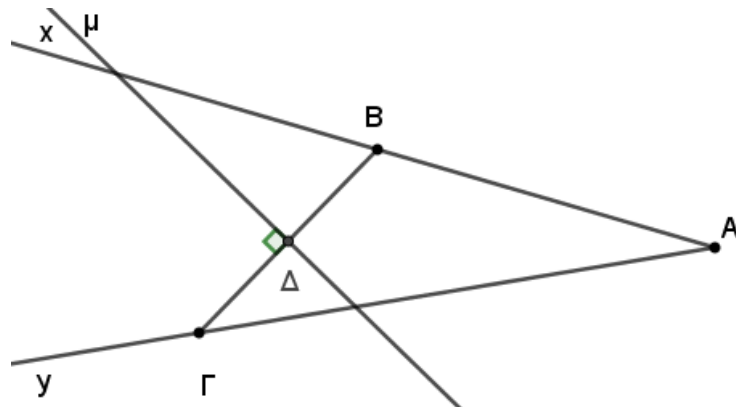
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

- α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)
- β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)
- γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 7)

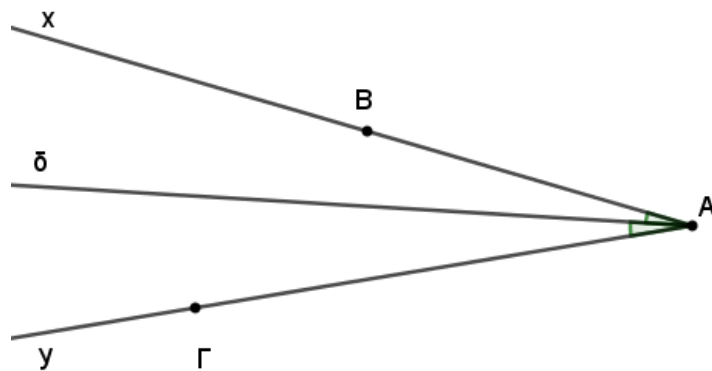
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



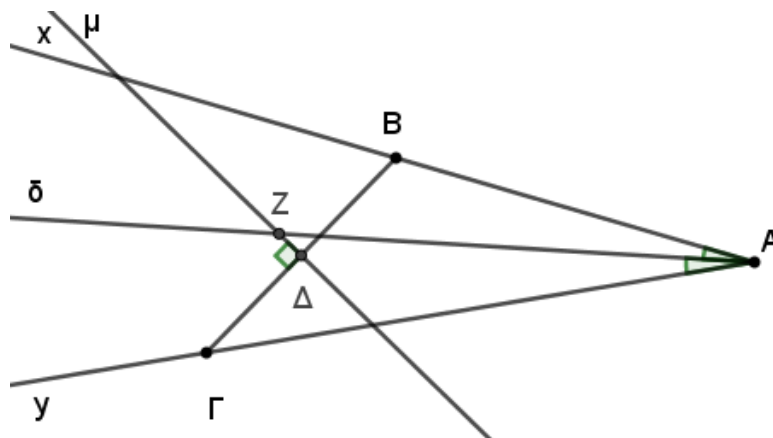
α) Τα σημεία που ισαπέχουν από δύο σημεία Β και Γ, βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. Άρα ο θησαυρός βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο μ του ΒΓ.



β) Ο θησαυρός ισαπέχει από τις πλευρές Αχ και Αγ της γωνίας $\widehat{xA\gamma}$, άρα θα βρίσκεται στη διχοτόμο Αδ.



γ) Ο θησαυρός ισαπέχει από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. Άρα ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο Αδ της γωνίας $\widehat{xA\gamma}$, έτσι ο θησαυρός βρίσκεται στο σημείο τομής Ζ των Αδ και μ.

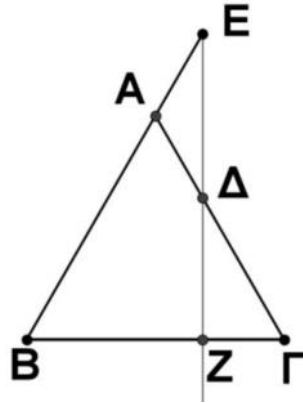


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE = A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$. (Μονάδες 10)

β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$. (Μονάδες 15)



α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, είναι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Τότε $\hat{\Delta A E} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι

$$\hat{A \Delta E} = \hat{E}.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

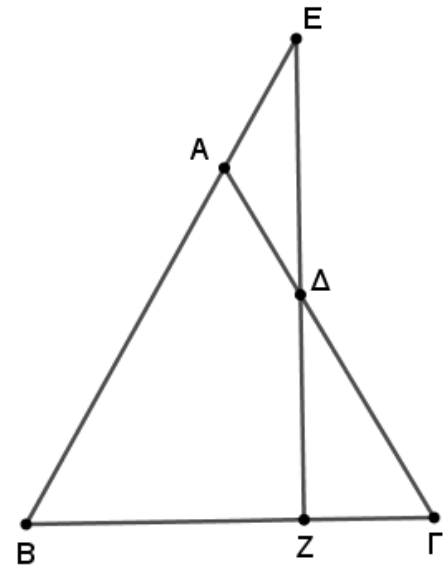
$$\hat{A \Delta E} + \hat{E} + \hat{\Delta A E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A \Delta E} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{A \Delta E} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{A \Delta E} = 30^\circ = \hat{E}$$

β) Είναι $\hat{A \Delta E} = \hat{Z \Delta \Gamma} = 30^\circ$ ως κατακορυφήν και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΖΓ προκύπτει ότι:

$$\hat{Z \Delta \Gamma} + \hat{\Delta Z \Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \hat{\Delta Z \Gamma} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta Z \Gamma} = 90^\circ, \text{ άρα } EZ \perp B\Gamma.$$



ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και την διάμεσο AM στην πλευρά $B\Gamma$.

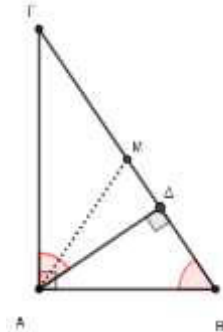
Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma A \Delta}$ είναι ίσες, (Μονάδες 12)

β) $\hat{A M \Delta} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$. (Μονάδες 13)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$, AD το ύψος του προς στην $B\Gamma$ και AM διάμεσός του στην πλευρά $B\Gamma$.

α)



Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) ισχύει ότι:

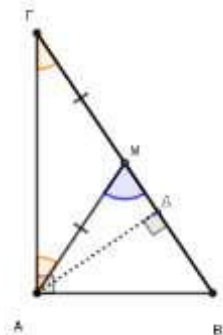
$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \text{ ή } \widehat{B} = 90^\circ - \widehat{\Gamma} \quad (1)$$

Αφού AD είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε $\widehat{AD\Gamma} = 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο $AD\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AD\Gamma$ ισχύει ότι:

$$\widehat{\Gamma\hat{A}D} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \text{ ή } \widehat{\Gamma\hat{A}D} = 90^\circ - \widehat{\Gamma} \quad (2). \text{ Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει } \widehat{B} = \widehat{\Gamma\hat{A}D}.$$

β)



Αφού η AM είναι διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, τότε

$$\text{θα είναι } AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG, \text{ αφού } M \text{ μέσο της } B\Gamma.$$

Αφού $AM = MG$ τότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο πλευρές του ίσες, οπότε $\widehat{\Gamma} = \widehat{M\hat{A}\Gamma}$ (3) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του $A\Gamma$.

Στο τρίγωνο $AM\Delta$ η γωνία $\widehat{A\hat{M}\Delta}$ είναι εξωτερική της γωνίας $\widehat{A\hat{M}\Gamma}$ του τριγώνου $AM\Gamma$, οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλαδή $\widehat{A\hat{M}\Delta} = \widehat{M\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Gamma}$ και αφού είναι $\widehat{\Gamma} = \widehat{M\hat{A}\Gamma}$ (σχέση (3)), τότε θα είναι

$$\widehat{A\hat{M}\Delta} = \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} \text{ ή } \widehat{A\hat{M}\Delta} = 2\widehat{\Gamma}.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$.

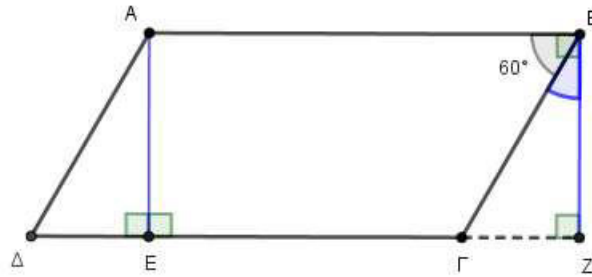
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$, (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\widehat{B} = 60^\circ$ και ΑΕ, ΒΖ ύψη του από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα προς την ευθεία ΔΓ.



α) Οι ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και το ΒΖ είναι ύψος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα θα είναι κάθετο στις παράλληλες ΑΒ και ΔΓ και θα είναι $\widehat{ABZ} = \widehat{Z} = 90^\circ$ (1). Οπότε $\widehat{GBZ} = \widehat{ABZ} - \widehat{ABG} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΖΒ ($\widehat{Z} = 90^\circ$) είναι $\widehat{GBZ} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη των 30° θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή $GZ = \frac{BG}{2}$ και αφού είναι $BG = AD$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, τότε $GZ = \frac{AD}{2}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

- $\widehat{E} = \widehat{Z} = 90^\circ$, γιατί τα τμήματα ΑΕ και ΒΖ είναι κάθετα στη ΒΓ ως ύψη του παραλληλογράμμου.
- $AD = BG$, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
- $\widehat{A} = \widehat{B}$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΔΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μία.

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ έχει τρεις γωνίες ορθές, την $\widehat{ABZ}$ από σχέση (1), την $\widehat{AEZ}$ και την $\widehat{E\hat{Z}B}$ αφού τα ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη, οπότε είναι ορθογώνιο.

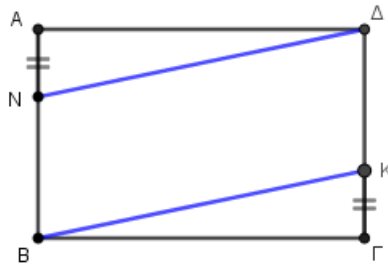
ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα , (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημεία Ν και Κ πάνω στις ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AN = ΓΚ$.



α) Τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$, αφού το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
- $AN = ΚΓ$, από υπόθεση
- $AD = ΒΓ$, ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

Άρα, τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β) Ισχύει $AB = ΔΓ$ (1) γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και επίσης $AN = ΚΓ$ (2) από υπόθεση. Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις ισότητας (1) και (2) βρίσκουμε: $AB - AN = ΔΓ - ΚΓ$, δηλαδή $BN = ΚΔ$ (3).

$ΔΝ=ΒΚ$ (4) ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων ΑΝΔ και ΒΓΚ (από το προηγούμενο ερώτημα). Από (3) και (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο D φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

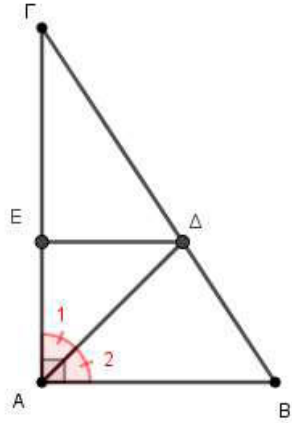
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ED\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ADE . (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{D}\Gamma$.

(Μονάδες 7)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, AD διχοτόμος της γωνίας A και DE παράλληλη στην AB .



α) Η ED είναι παράλληλη στην AB και η AG είναι κάθετη στην AB , αφού είναι $\hat{A} = 90^\circ$.
Οπότε, η AG θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ED . Άρα, το τρίγωνο $ED\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία ΓED .

β) Επειδή AD διχοτόμος της ορθής γωνίας $\hat{A}$, ισχύει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2} = 45^\circ$

Αφού είναι $\hat{A}_2 = 45^\circ$ τότε θα είναι και $\hat{ADE} = 45^\circ$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ED και AB με τέμνουσα την AD .

γ) Έστω ότι η $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη της $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ$ (1)

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (2)

Οπότε, λόγω της σχέσης (1), η σχέση (2) γίνεται:

$$\hat{\Gamma} + 20^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ. \text{ Τότε } \hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ = 55^\circ.$$

Οι $\hat{ED\Gamma}$ και $\hat{B}$ είναι ίσες, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων DE , AB με τέμνουσα την $B\Gamma$. Άρα, $\hat{ED\Gamma} = \hat{B} = 55^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

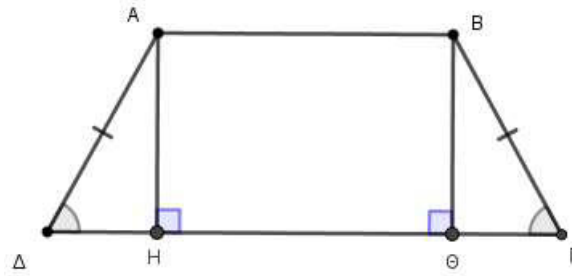
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=8$ και $\Delta\Gamma=12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραπεζίου,

α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου. (Μονάδες 13)

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΑΗ, ΒΘ τα ύψη του.

α)



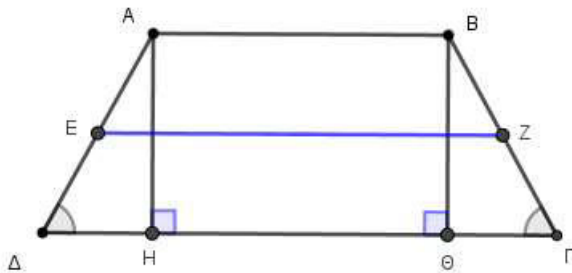
Επειδή ΑΗ και ΒΘ είναι ύψη τραpezίου είναι $AH \perp \Delta\Gamma$ και $B\Theta \perp \Delta\Gamma$.

Οπότε, τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ είναι ορθογώνια με $\widehat{A\hat{H}\Delta} = \widehat{B\hat{\Theta}\Gamma} = 90^\circ$ και έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$, ως πλευρές (μη παράλληλες) του ισοσκελούς τραpezίου.
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$, ως γωνίες προσκείμενες σε βάση ισοσκελούς τραpezίου.

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ είναι ίσα γιατί έχουν την υποτείνουσα και την προσκείμενη σε αυτήν γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε και $\Delta H = \Theta\Gamma$.

β)



Έστω ΕΖ η διάμεσος του τραpezίου, τότε η ΕΖ θα ισούται με το ημιάθροισμα των

βάσεων του τραpezίου, δηλαδή $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.

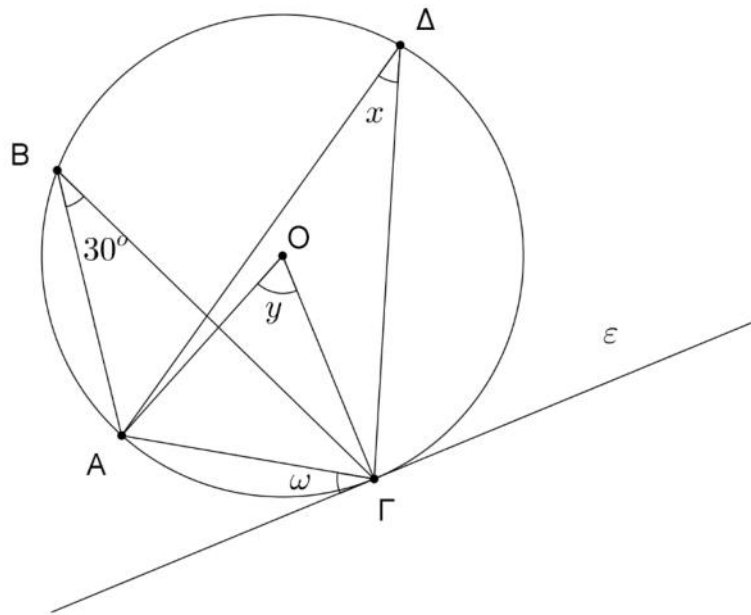
Οπότε, $EZ = \frac{8+12}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο σημείο Γ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου OAG ως προς τις πλευρές. (Μονάδες 10)



α) Οι γωνιές $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες του κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{A\Gamma}$, οπότε θα είναι ίσες. Δηλαδή $\widehat{A\Gamma} = \widehat{A\hat{B}\Gamma}$, άρα $\hat{x} = 30^\circ$.

Η γωνία $\widehat{A\hat{O}\Gamma}$ είναι επίκεντρη γωνία του κύκλου και βαίνει στο τόξο $\widehat{A\Gamma}$. Στο ίδιο τόξο βαίνει και η εγγεγραμμένη $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$. Οπότε, γνωρίζοντας ότι κάθε εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν θα είναι $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \frac{\widehat{A\hat{O}\Gamma}}{2}$.

Δηλαδή, $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = 2\widehat{A\hat{B}\Gamma}$, άρα $\hat{y} = 60^\circ$ (1)

Η γωνία $\hat{\omega}$ σχηματίζεται από τη χορδή $A\Gamma$ και την εφαπτομένη ευθεία ϵ στο άκρο Γ της χορδής οπότε θα ισούται με κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\widehat{A\Gamma}$ της χορδής. Δηλαδή, είναι $\hat{\omega} = \widehat{A\hat{B}\Gamma}$, άρα $\hat{\omega} = 30^\circ$.

β) Το τρίγωνο $O\hat{A}\Gamma$ είναι ισοσκελές αφού $OA = O\Gamma$ ως ακτίνες του κύκλου, και έχει τη γωνία της κορυφής του $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = \gamma = 60^\circ$. Άρα, θα είναι ισόπλευρο.

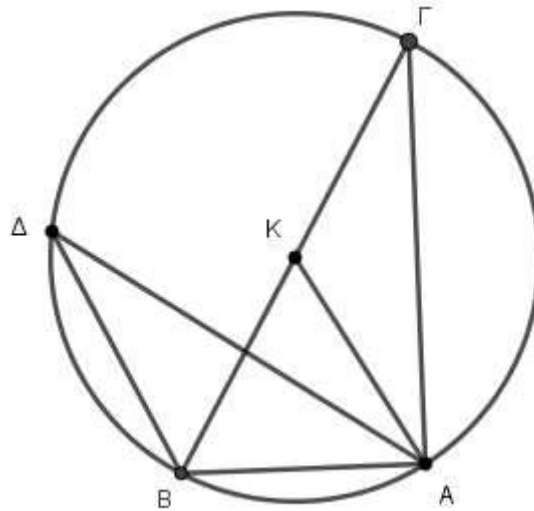
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος (K, ρ) , μια διάμετρος του $B\Gamma$ και χορδή του $BA = \rho$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των B και Γ , όπως στο σχήμα που ακολουθεί,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{B\Delta A}$. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)



α) Είναι $KA = KB = KG$ ως ακτίνες κύκλου και $KG = BA$ από τα δεδομένα.

Άρα $KA = KB = AB$, οπότε το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο γιατί έχει τις τρεις πλευρές του ίσες.

β) Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{B\hat{D}A}$ και η επίκεντρη $\widehat{B\hat{K}A}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{AB}$ του κύκλου. Η γωνία $\widehat{B\hat{K}A}$, ως γωνία ισοπλεύρου τριγώνου, θα είναι ίση με 60° .

Γνωρίζοντας ότι κάθε εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν, θα είναι $\widehat{B\hat{D}A} = \frac{\widehat{B\hat{K}A}}{2}$. Οπότε, $\widehat{B\hat{D}A} = \frac{60^\circ}{2}$, άρα $\widehat{B\hat{D}A} = 30^\circ$.

γ) Οι γωνίες $\widehat{B\hat{D}A}$ και $\widehat{B\hat{\Gamma}A}$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{AB}$ του κύκλου, οπότε θα είναι ίσες και αφού $\widehat{B\hat{D}A} = 30^\circ$ άρα και $\widehat{B\hat{\Gamma}A} = 30^\circ$.

Η $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως το τόξο $\widehat{B\hat{D}\Gamma}$ είναι ημικύκλιο. Άρα, η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ που βαίνει στο ημικύκλιο είναι ορθή, δηλαδή $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

Η $\widehat{\Gamma\hat{B}A} = 60^\circ$ γιατί είναι και γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου BKA .

Επομένως, οι γωνίες του τριγώνου $BA\Gamma$ είναι $\widehat{B\hat{\Gamma}A} = 30^\circ$, $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$ και $\widehat{\Gamma\hat{B}A} = 60^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

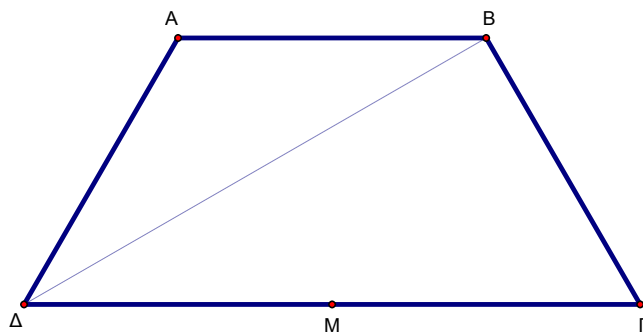
Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε $AB=AD=\frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{A}=60^\circ$ και M το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

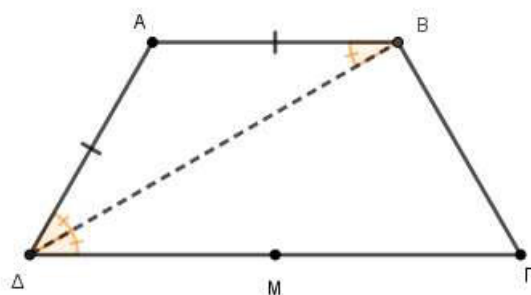
α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, (Μονάδες 9)

β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 16)



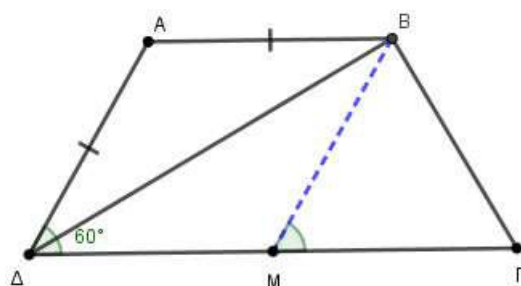
α)



Είναι $\widehat{\Delta B} = \widehat{A B \Delta}$ (1) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων AB και ΓΔ με τέμνουσα την ΒΔ. Επειδή είναι $AB = AD$, το τρίγωνο ABΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΔ, άρα $\widehat{\Delta B} = \widehat{A B \Delta}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\widehat{A \Delta B} = \widehat{\Gamma \Delta B}$, άρα η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.

β)



Φέρνουμε το τμήμα ΒΜ. Επειδή $AB \parallel \Gamma \Delta$ ως βάσεις του τραπεζίου ABΓΔ, άρα $AB \parallel \Delta M$. Αφού είναι $AB = \frac{\Gamma \Delta}{2}$ και το Μ είναι μέσο του ΔΓ από την υπόθεση, άρα $AB = \Delta M$.

Οπότε, το τετράπλευρο ΑΔΜΒ έχει τις απέναντι πλευρές του AB και ΔΜ παράλληλες και ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή είναι $AB = AD$ από την υπόθεση άρα το παραλληλόγραμμο ΑΔΜΒ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος. Επειδή το ΑΔΜΒ είναι ρόμβος, ισχύει ότι $BM = \Delta M$. Και αφού $\Delta M = M \Gamma$ γιατί Μ είναι μέσο του ΔΒ, τότε θα είναι $BM = M \Gamma$. Οπότε το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

Αφού $\widehat{\Delta} = 60^\circ$ τότε και $\widehat{B M \Gamma} = \widehat{\Delta} = 60^\circ$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ και ΒΜ με τέμνουσα την ΔΓ.

Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΓ έχει τη γωνία της κορυφής του ίση με 60° θα είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$ όπως στο σχήμα, τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

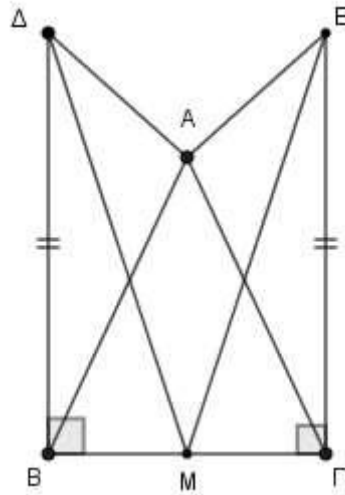
Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

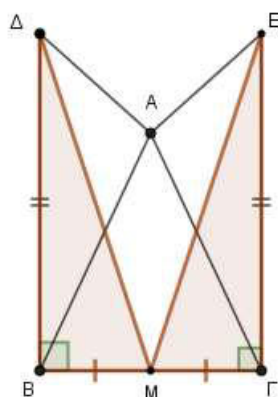
(Μονάδες 12)

β) $AD=AE$.

(Μονάδες 13)



α)



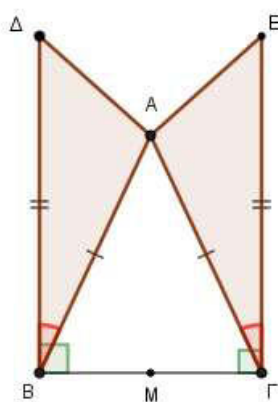
Εφόσον τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι κάθετα στη ΒΓ, άρα

$\widehat{MBD} = \widehat{MGE} = 90^\circ$ οπότε τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $BD = GE$ από υπόθεση
- $BM = MG$, αφού Μ μέσο της ΒΓ

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β)



Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- $BD = GE$ από υπόθεση
- $AB = AG$ ως ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με βάση ΒΓ
- $\widehat{ABD} = \widehat{AGE}$ ως συμπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{G}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AD = AE$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{ABD}$ και $\widehat{AGE}$ αντίστοιχα.

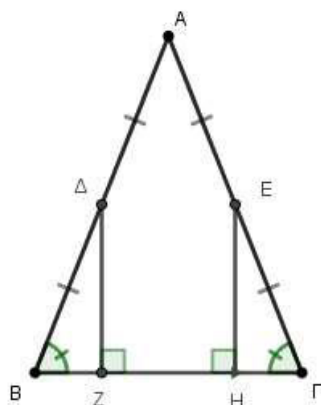
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) .

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.



α) Έστω Δ , E τα μέσα των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και ΔZ , EH οι αποστάσεις των E , Z από τη βάση $B\Gamma$.

Τα τρίγωνα ΔZB και $EH\Gamma$ έχουν:

- $\widehat{BZ\Delta} = \widehat{\Gamma H E} = 90^\circ$ αφού ΔZ και EH ως αποστάσεις, από την υπόθεση, είναι κάθετες στη $B\Gamma$.
- $\Delta B = E\Gamma$ ως μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

Άρα τα τρίγωνα ΔZB και $EH\Gamma$ είναι ορθογώνια που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

Οπότε έχουν και $\Delta Z = EH$ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Δηλαδή, τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ + \widehat{B} + \widehat{B} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{B} = 105^\circ. \text{ Άρα } \widehat{B} = 35^\circ.$$

$$\text{Οπότε } \widehat{A} = 75^\circ + 35^\circ = 110^\circ.$$

ΘΕΜΑ 2

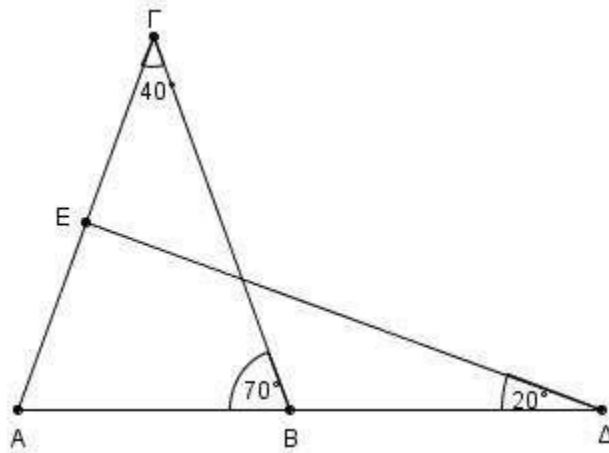
Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) η γωνία $AE\Delta$ είναι ορθή.

(Μονάδες 13)



α) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (1) και αφού $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ τότε από τη σχέση (1) βρίσκουμε ότι $\hat{A} = 70^\circ$.

Επειδή είναι $\hat{A} = 70^\circ = \hat{B}$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΓΑ και ΓΒ.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΔ έχουμε:

$\hat{AED} + \hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ (2) και αφού $\hat{\Delta} = 20^\circ$ ως δεδομένο και $\hat{A} = 70^\circ$ από α) ερώτημα, τότε από τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι $\hat{AED} = 90^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

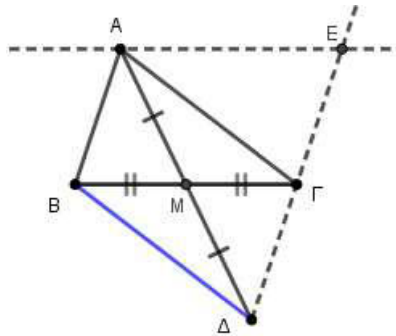
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM , προς το M , κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) $BM = \frac{AE}{2}$. (Μονάδες 13)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, M μέσο της $B\Gamma$, Δ σημείο στην προέκταση της AM προς το M τέτοιο ώστε $M\Delta = MA$, E το σημείο τομής της $A\Gamma$ με ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στη $B\Gamma$.



α) Φέρνουμε το τμήμα $B\Delta$. Επειδή έχουμε $M\Gamma = BM$ αφού το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και $MA = M\Delta$ από την υπόθεση, τότε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του $A\Delta$ και $B\Gamma$ διχοτομούνται.

β) Έχουμε ότι η ευθεία AE είναι παράλληλη στην $B\Gamma$, οπότε και τα τμήματα AE και $B\Gamma$ είναι παράλληλα.

Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Άρα και τα τμήματα AB και ΓE είναι παράλληλα.

Συνεπώς, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες.

Επειδή $AE = B\Gamma$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma E$, ισχύει ότι

$$BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AE}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2

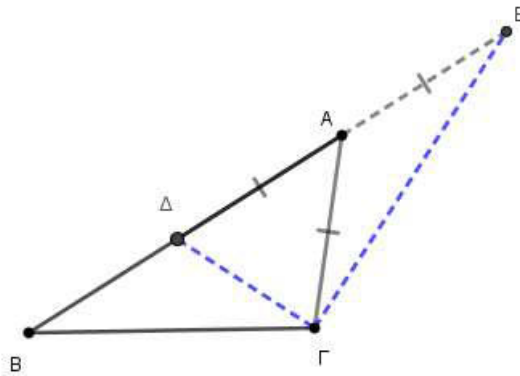
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$, (Μονάδες 12)

β) η γωνία $EA\Gamma$ είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$. (Μονάδες 13)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma < AB$, σημείο Δ στην πλευρά AB τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και σημείο E στην προέκταση της BA τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$.



α) Φέρνουμε τα τμήματα $\Delta\Gamma$ και ΓE . Αφού από υπόθεση είναι $A\Delta = A\Gamma$ και $AE = A\Gamma$ τότε $A\Delta = A\Gamma = AE$. Οπότε στο τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ το τμήμα $A\Gamma$ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΔE και είναι ίσο με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί, δηλαδή είναι $A\Gamma = \frac{\Delta E}{2}$.

Επομένως, το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΔE και με ορθή τη γωνία $E\hat{\Gamma}\Delta$, άρα $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$.

β) Επειδή είναι $A\Gamma = A\Delta$, το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$ (1).

Η $E\hat{A}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $A\Delta\Gamma$, οπότε είναι $E\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta + A\hat{\Delta}\Gamma$ και αφού είναι $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$ λόγω της σχέσης (1), άρα $E\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma = 2A\hat{\Delta}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος κέντρου O και διάμετρος του $B\Gamma$. Θεωρούμε σημεία A και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της $B\Gamma$, τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο x του τόξου $\Gamma\Delta$

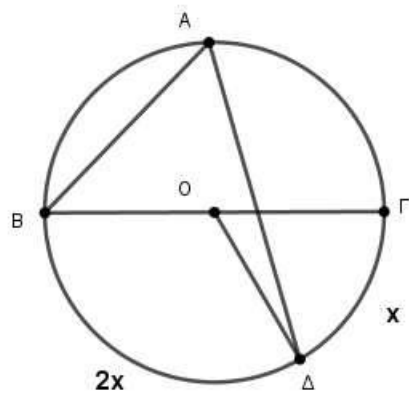
(Μονάδες 8)

β) τη γωνία $BO\Delta$

(Μονάδες 9)

γ) τη γωνία $BA\Delta$

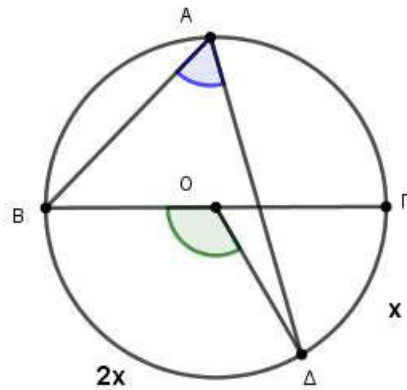
(Μονάδες 8)



α) Το τόξο $\widehat{B\Delta\Gamma}$ είναι ημικύκλιο, οπότε: $2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$.

β) Η γωνία $\widehat{B\hat{O}\Delta}$ είναι επίκεντρη και βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Delta}$, άρα $\widehat{B\hat{O}\Delta} = 2x = 120^\circ$.

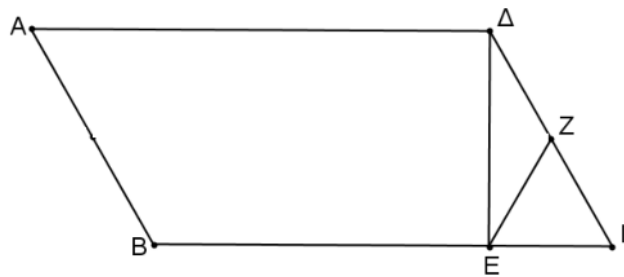
γ) Η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Delta}$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Delta}$, άρα $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.



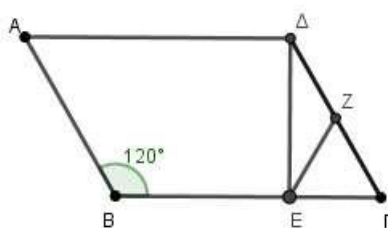
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)
β) Αν K είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$. (Μονάδες 9)
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $EZ\Gamma$. (Μονάδες 8)



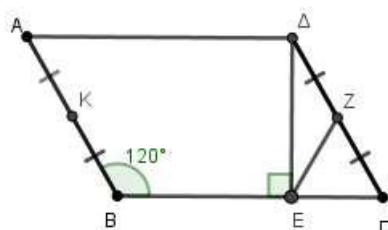
α)



Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD και $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ και αφού $\hat{B} = 120^\circ$ άρα $\hat{A} = 60^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου άρα είναι ίσες, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 60^\circ$.

β)



Έστω K το μέσο της πλευράς AB , τότε θα είναι $AK = KB = \frac{AB}{2}$ (1).

Αφού $DE \perp B\Gamma$ τότε το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο και το EZ είναι διάμεσος (από υπόθεση) που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του $\Delta\Gamma$, άρα $EZ = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ (2).

Είναι $AB = \Delta\Gamma$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ οπότε $\frac{AB}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ (3)

Επομένως, από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $AK = EZ$.

γ) Επειδή $EZ = \frac{\Delta\Gamma}{2} = Z\Delta = Z\Gamma$, το τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ZE , $Z\Gamma$ και τη γωνία $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, οπότε θα είναι ισόπλευρο. Άρα $\angle EZ\Gamma = 60^\circ$.