

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ερώτηση:

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Απάντηση:

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ , ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Παρατηρήσεις:

- Η έννοια της αρχικής συνάρτησης ορίζεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Δηλαδή δεν έχει νόημα η έκφραση «η F είναι παράγουσα της f », διότι δεν αναφέρεται διάστημα.

Ούτε η έκφραση «η F είναι παράγουσα της f στο σύνολο A », όταν το A δεν είναι διάστημα.

Παράδειγμα, αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $F(x) = \ln |x|$ είναι $D_f = D_F = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και για

κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ισχύει $F'(x) = f(x)$, είναι λάθος η έκφραση «η F είναι παράγουσα της f στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ » διότι το A δεν είναι διάστημα αλλά ένωση διαστημάτων.

Για να μιλάμε για παράγουσα της f , πρέπει η f αρχικά να είναι ορισμένη σε διάστημα Δ οπότε:

Αν $\Delta = (-\infty, 0)$, τότε η F είναι παράγουσα της f στο $(-\infty, 0)$.

Αν $\Delta = (0, +\infty)$, τότε η F είναι παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$.

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε η f έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί μια συνάρτηση f να μην είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , και η f να έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής, αλλά

$$\text{έχει παράγουσα στο } \mathbb{R} \text{ την } F(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

- Αν μια συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό, αφού αν η f ήταν συνεχής στο Δ θα είχε και παράγουσα στο Δ που είναι άτοπο.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ερώτηση:

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να δείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν:
 $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε: $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα, $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Επομένως υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ

A/	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x) = 0$	$G(x) = c, c \in \mathbb{R}$,
2	$f(x) = 1$	$G(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln x + c, c \in \mathbb{R}$
4	$f(x) = x^a$	$G(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, c \in \mathbb{R}$
5	$f(x) = \sin x$	$G(x) = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$
6	$f(x) = \eta \mu x$	$G(x) = \sin x + c, c \in \mathbb{R}$

7	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$G(x) = \varepsilon \varphi x + c, c \in \mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x}$	$G(x) = -\sigma \varphi x + c, c \in \mathbb{R}$
9	$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
10	$f(x) = a^x$	$G(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}$

Σημείωση:

Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

Ιδιότητες

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

- i) Η συνάρτηση $F + G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f + g$ και
- ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

Ασκήσεις

4.1 Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

- i) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4$
- ii) $f(x) = 3x^2 - 2\eta \mu x + \sigma \nu \nu x$
- iii) $f(x) = 5^x - 2e^x$
- iv) $f(x) = e^x + \frac{4}{x} + \eta \mu x$
- v) $f(x) = 2^x - \frac{1}{x} + 3$

4.2 Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

- i) $f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x} - e^x + 2$
- ii) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - x$
- iii) $f(x) = \sqrt{x} + x + \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x}$

4.3 Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

- i) $f(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^2$
- ii) $f(x) = 2x\sqrt{x} + 4$
- iii) $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)^2$
- iv) $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$
- v) $f(x) = (2x + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1)$

4.4 Να βρεθεί συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ αν ισχύει:

$$f'(x) = x^5 - \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{x} \text{ και η } C_f \text{ διέρχεται από το σημείο } M(1,0).$$

- 4.5** Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση: $f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, 2)$.
- 4.6** Να βρεθεί η συνάρτηση f αν ισχύουν: $f''(x) = 3x$, $f'(1) = 2$ και $f(0) = 3$.
- 4.7** Να βρεθεί συνάρτηση f αν για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f'(x) \cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$ και η C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει κλίση $\frac{1}{2}$.
- 4.8** Να βρεθεί η συνάρτηση f αν η C_f στο σημείο της $M(-1, 1)$ έχει κλίση 2 και $f''(x) = 12x^2 + 4x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 4.9** Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^{(3)}(x) = 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση C_f έχει σημείο καμπής το $A\left(1, \frac{3}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.
- 4.10** Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(3x - 4) = 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.
- 4.11** Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(x) > 0$ και $f'(x) = (2x + 2) \cdot \sqrt{f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση C_f έχει στο σημείο της $A(0, f(0))$ εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$.
- 4.12** Να βρείτε όλες τις καμπύλες $y = f(x)$ οι οποίες σε κάθε σημείο με τετμημένη x_0 έχουν συντελεστή διευσθύνσεως $\lambda = \frac{1}{2}(e^{x_0} - e^{-x_0})$. Ποια απ' αυτές τις καμπύλες διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 2, \frac{3}{4}\right)$.
- 4.13** Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\frac{d^2f}{dx^2} = x + 3\ln x$, $f'(0) = 1$ και $f(0) = -2$.
- 4.14** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $y = f(x)$ για τις οποίες ισχύει: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(2x-1)^2}$
Στη συνέχεια να προσδιορισθεί εκείνη η συνάρτηση της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 3)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ έχει συντελεστή διευσθύνσεως $\lambda = 4$.

- 4.15** Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^2(x) \cdot f'(x) = x^2 + 1$, $x \geq 0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 4.16** Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $\frac{df(x)}{dx} \cdot e^{f(x)} = 3x^2 + 2$ και η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $M(2, f(2))$ να έχει συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda = \frac{7}{6}$.
- 4.17** Να βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f στο διάστημα $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει: $f'(x^2) = 3 - \frac{1}{x}$.
- 4.18** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $y = f(x)$ για τις οποίες η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο με τετμημένη x_0 έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda = \frac{2x_0 + 1}{\sqrt{2x_0^2 + 2x_0 + 5}}$.
- 4.19** Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(2x^2 - 1) = 4x^2 - 2$, $f'(1) = 2$ και $f(-1) = 0$, να βρεθεί η συνάρτηση f .
- 4.20** Να βρείτε την συνάρτηση $y = f(x)$ αν είναι γνωστό ότι $f''(2x - 1) + \frac{1}{2} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, 3)$ έχει συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda = 2$.
- 4.21** Αν $P(t)$ είναι ο πληθυσμός μιας χώρας, όπου t ο χρόνος σε έτη, ένας «νόμος της αύξησης» εκφράζεται από τη σχέση $P'(t) = kP(t)$, όπου $k > 0$ σταθερά που εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $P(t)$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο:
- α)** Να λύσετε την εξίσωση $P'(t) = kP(t)$.
- β)** Αν υποθέσουμε ότι για τον πληθυσμό της Ελλάδας ισχύει ο νόμος της αύξησης από το 1920 και μετά, που ο πληθυσμός ήταν 5.000.000 και ότι το 1990 ο πληθυσμός ήταν 10.000.000, να βρεθεί η σταθερά k για την Ελλάδα.
- γ)** Αν υποθέσουμε ότι οι συνθήκες διαβίωσης δεν θα μεταβληθούν σημαντικά, να «προβλεφθεί» ο πληθυσμός της Ελλάδας το έτος 2010.

- 4.22** Αν $y = f(t)$ είναι η μάζα τη χρονική στιγμή t μιας ραδιενεργού ουσίας, τότε σύμφωνα με το «νόμο της διάσπασης» ισχύει $y' = -ky$, όπου k θετική σταθερά και t ο χρόνος σε έτη.
- α)** Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y' = -ky$.
- β)** Αν ορίσουμε ως «χρόνο υποδιπλασιασμού» το χρόνο T , στον οποίο η αρχική μάζα μειώνεται στο μισό, να αποδείξετε ότι $T = \frac{\ln 2}{k}$ και ότι ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι ο ίδιος για οποιαδήποτε μάζα μιας συγκεκριμένης ραδιενεργού ουσίας.
- γ)** Το ραδιενεργό στοιχείο ράδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 1600 χρόνια. Να βρείτε πόση μάζα θα έχει διασπαστεί μετά από 100 χρόνια, αν η αρχική μάζα είναι 5 kgr.
- 4.23** Θεωρείται γνωστό ότι ο ρυθμός με τον οποίο διαδίδεται μια είδηση σε μια πόλη με συνολικό πληθυσμό A είναι ανάλογος του αριθμού των κατοίκων που δεν γνωρίζουν την είδηση. Να εκφράσετε τον αριθμό των κατοίκων που έχουν πληροφορηθεί την είδηση ως συνάρτηση του χρόνου t .